



إعداد و تصميم



**محمود عوض حسن**  
معلم أول رياضيات



## تساوى زوجين مرتبين

• الزوج المرتب: (أ، ب) يسمى زوج مرتب

يسمى أ: المسقط الأول أو الإحداثي السيني

يسمى ب: المسقط الثاني أو الإحداثي الصادي

♦ (أ، ب) ≠ (ب، أ) فمثلا (٥، ٢) ≠ (٢، ٥)

♦ (٣، ١) يسمى زوج مرتب بينما {١، ٣} تسمى مجموعة

■ إذا تساوى زوجين مرتبين فإن :

المسقط الأول = المسقط الأول ، المسقط الثاني = المسقط الثاني

فمثلا: إذا كان (٣، ٥) = (س، ص) فإن: س = ٥ ، ص = ٣

أيضا: إذا كان (١٠، ٢ - س) = (٧، ٢ + ص) فإن س - ٢ = ٧ ← س = ٩ ، ص + ٢ = ١٠ ← ص = ٨

مثال 2

إذا كانت (٣٢،  $\sqrt[3]{27}$ ) = (س°، ص + ١)

فأوجد قيمة كل من س، ص

$$س° = ٣٢ \therefore س° = ٢°$$

$$\therefore س = ٢$$

$$ص + ١ = \sqrt[3]{27} \therefore ص + ١ = ٣$$

$$\therefore ص = ٢$$

مثال ١

إذا كانت (١١، ١ - س) = (٨، ص + ٣)

فأوجد قيمة  $\sqrt{س + ٢}$

الحل

$$س - ١ = ٨ \therefore س = ٩$$

$$ص + ٣ = ١١ \therefore ص = ٨$$

$$\therefore \sqrt{س + ٢} = \sqrt{٨ + ٢} = \sqrt{١٠}$$

$$= \sqrt{١٦ + ٩} = \sqrt{٢٥} = ٥$$

تمرين

إذا كانت: (٨، ب - ١) = (٥ + أ، ٣)

فإن أ = ..... ، ب = .....



## حاصل الضرب الديكارتي

حاصل الضرب الديكارتي لمجموعتين منتهيتين غير خاليتين  $S$ ،  $V$

- حاصل الضرب الديكارتي للمجموعتين  $S$ ،  $V$  يكتب  $S \times V$  ويقرأ  $S$  ضرب  $V$
- $S \times V$  : هو مجموعة الأزواج المرتبة التي مسقطها الأول ينتمي للمجموعة  $S$  ومسقطها الثاني ينتمي للمجموعة  $V$ .

أي أن:  $S \times V = \{ (a, b) : a \in S, b \in V \}$

- فمثلاً: إذا كانت  $S = \{1, 3\}$ ،  $V = \{2, 4, 6\}$

$$S \times V = \{1, 3\} \times \{2, 4, 6\} = \{ (1, 2), (1, 4), (1, 6), (3, 2), (3, 4), (3, 6) \}$$

$$= \{ (1, 2), (1, 4), (1, 6), (3, 2), (3, 4), (3, 6) \}$$

$$بينما  $V \times S = \{2, 4, 6\} \times \{1, 3\} = \{ (2, 1), (2, 3), (4, 1), (4, 3), (6, 1), (6, 3) \}$$$

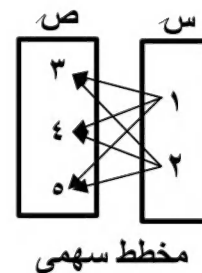
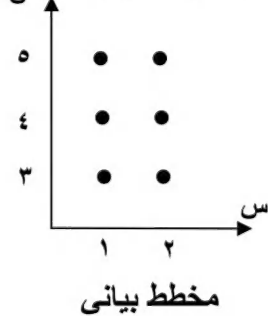
$$= \{ (2, 1), (2, 3), (4, 1), (4, 3), (6, 1), (6, 3) \}$$

- لاحظ أن:  $S \times V \neq V \times S$
- يمكن تمثيل  $S \times V$  كمخطط سهمي ومخطط بياني كما في المثال التالي.

**مثال** إذا كانت  $S = \{1, 2\}$ ،  $V = \{3, 4, 5\}$

فأوجد  $S \times V$  ومثله بمخطط سهمي وآخر بياني

$$S \times V = \{ (1, 3), (1, 4), (1, 5), (2, 3), (2, 4), (2, 5) \}$$



حاصل الضرب الديكارتي  $S \times V$  أو  $V \times S$

- إذا كانت  $S = \{3, 4, 8\}$

$$S \times S = \{3, 4, 8\} \times \{3, 4, 8\} = \{ (3, 3), (3, 4), (3, 8), (4, 3), (4, 4), (4, 8), (8, 3), (8, 4), (8, 8) \}$$

$$= \{ (3, 3), (3, 4), (3, 8), (4, 3), (4, 4), (4, 8), (8, 3), (8, 4), (8, 8) \}$$





## عدد العناصر: يرمز له بالرمز ن

- ◆ إذا كانت  $S = \{2, 5\}$  فإن عدد عناصر  $S = 2$  وتكتب  $N(S) = 2$
- ◆ إذا كانت  $S = \{4\}$  فإن  $N(S) = 1$  وليس 4

$$N(S \times S) = N(S) \times N(S) \quad \text{القاعدة:}$$

فمثلاً: إذا كانت  $N(S) = 4$  ،  $N(S) = 5$  فإن  $N(S \times S) = 4 \times 5 = 20$   
أيضاً: إذا كانت  $S = \{1, 3\}$  ،  $S = \{2, 4, 6\}$  فإن  $N(S \times S) = 2 \times 3 = 6$

## العمليات على المجموعات

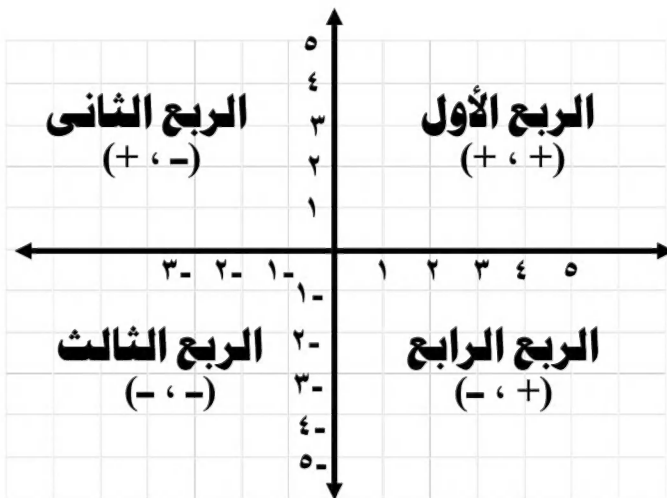
إذا كانت  $S = \{2, 3\}$  ،  $S = \{3, 4, 5\}$  فإن:

- ◆ **التقاطع  $\cap$** :  $S \cap S = \{3\}$  ← خذ المكرر
- ◆ **الاتحاد  $\cup$** :  $S \cup S = \{2, 3, 4, 5\}$  ← خذ الكل ، والمكرر مرة واحدة
- ◆ **الفرق  $-$** :  $S - S = \{2\}$  ← خذ الموجود في  $S$  ومش موجود في  $S$
- ◆  $S - S = \{4, 5\}$  ← خذ الموجود في  $S$  ومش موجود في  $S$

## الشبكة التربيعية المتعامدة

- تنقسم الشبكة التربيعية إلى 4 أرباع ومحور سينات ومحور صادات
- يمكن التعرف على الربع الذي تقع فيه أي نقطة من إشارتي إحداثيها كما بالشكل.
- إذا كان الإحداثي السيني = صفر فإن النقطة تقع على محور الصادات مثل  $(0, 3)$
- إذا كان الإحداثي الصادي = صفر فإن النقطة تقع على محور السينات مثل  $(2, 0)$

### مثال



- ◆ النقطة  $(2, 5)$  تقع في الربع الأول
- ◆ النقطة  $(3, -2)$  تقع في الربع الثاني
- ◆ النقطة  $(-4, -3)$  تقع في الربع الثالث
- ◆ النقطة  $(3, -1)$  تقع في الربع الرابع
- ◆ النقطة  $(2, 0)$  تقع على محور الصادات
- ◆ النقطة  $(0, 4)$  تقع على محور السينات
- ◆ النقطة  $(0, 0)$  تسمى نقطة الأصل "و"

### أوربب

- ◆ النقطة  $(-6, 5)$  تقع .....
- ◆ النقطة  $(-2, 0)$  تقع .....
- ◆ النقطة  $(4, 3)$  تقع .....
- ◆ النقطة  $(-3, -2)$  تقع .....
- ◆ النقطة  $(-4, -7)$  تقع .....
- ◆ النقطة  $(0, 5)$  تقع .....



١

إذا كانت  $س \times ص = \{(٧,٢), (٥,٢), (٢,٢)\}$   
أوجد : (١)  $ص$  (٢)  $س \times ص$   
(٣)  $ن (ص)$

الحل

$$ص = \{٧, ٥, ٢\}$$

$$س \times ص = \{(٢,٧), (٢,٥), (٢,٢)\}$$

$$ن (ص) = ٣ \times ٣ = ٩$$

٢

إذا كانت  $س = \{٤, ٣\}$  ،  $ص = \{٥, ٤\}$   
ع =  $\{٥, ٦\}$  فأوجد :  
(١)  $س \times (ص \cap ع)$  (٢)  $(س - ص) \times ع$

الحل

التجهيز:  $(ص \cap ع) = \{٥\}$  ،  $س - ص = \{٣\}$

$$س \times (ص \cap ع) = \{٥\} \times \{٤, ٣\} = \{(٥, ٤), (٥, ٣)\}$$

$$(س - ص) \times ع = \{٣\} \times \{٥, ٦\} = \{(٣, ٥), (٣, ٦)\}$$

٣

إذا كانت  $س = \{٥, ٢\}$  ،  $ص = \{٢, ١\}$   
ع =  $\{٣\}$  فأوجد :  
(١)  $ن (س \times ص)$  (٢)  $(ص \cap س) \times ع$

الحل

$$ن (س \times ص) = ن (س) \times ن (ص) = ٢ \times ١ = ٢$$

$$٢ = ن (ص \cap س)$$

$$(ص \cap س) \times ع = \{٢\} \times \{٣\} = \{(٢, ٣)\}$$

٤

إذا كانت  $س = \{٦, ٥, ١\}$  ،  $ص = \{٥, ٤, ٢\}$   
فأوجد : (١)  $س \times ص$  ومثله بمخطط سهمي  
(٢)  $ن (س \times ص)$

الحل

$$س \times ص = \{(١, ٢), (٥, ٢), (٦, ٢), (١, ٤), (٥, ٤), (٦, ٤), (١, ٥), (٥, ٥), (٦, ٥)\}$$

مثل المخطط بنفسك

$$ن (س \times ص) = ن (س) \times ن (ص) = ٣ \times ٣ = ٩$$

٥

إذا كانت  $س = \{٣, ٢\}$  ،  $ص = \{٥, ٤, ٣\}$   
فأوجد : (١)  $س \times ص$   
(٢)  $ن (س \times ص) \cap ص$

الحل

$$س \times ص = \{(٣, ٢), (٤, ٢), (٥, ٢), (٣, ٣), (٤, ٣), (٥, ٣)\}$$

$$ن (س \times ص) = \{(٣, ٢), (٤, ٢), (٥, ٢), (٣, ٣), (٤, ٣), (٥, ٣)\}$$

$$ن (س \times ص) \cap ص = \{(٣, ٣), (٤, ٣), (٥, ٣)\}$$

٦

إذا كانت  $س = \{١, ٢\}$  ،  $ص = \{١, ٤\}$   
ع =  $\{٢, ٥, ٤\}$  فأوجد :  
فأوجد : (١)  $س \times ص$  (٢)  $س$   
(٣)  $ن (س \times ع)$  (٤)  $ن (ع)$  (٥)  $ن (ص)$

الحل

$$س \times ص = \{(١, ١), (١, ٤), (٢, ١), (٢, ٤)\}$$

$$س = \{(١, ١), (٢, ١), (١, ٢), (٢, ٢)\}$$

$$ن (س \times ع) = ن (س) \times ن (ع) = ٢ \times ٣ = ٦$$

$$ن (ع) = ٣ \times ٣ = ٩$$

$$ن (ص) = ٢ \times ٢ = ٤$$



## العلاقة ع

- العلاقة من مجموعة س إلى مجموعة ص هي مجموعة جزئية من الضرب الديكارتي س × ص.
- يتم اختيار أزواج بيان العلاقة من أزواج الضرب الديكارتي حسب شرط معين يعطى لك في المسألة
- المقصود بجملة أ ع ب : أي علاقة أ ، ب حيث أ هي المسقط الأول ، ب هي المسقط الثاني في الأزواج المرتبة
- إذا كانت العلاقة من س إلى ص : فإن المسقط الأول س ، المسقط الثاني ب ص

### تدريب

إذا كانت س = { ٥ ، ٣ ، ٢ } ،  
 ص = { ١٠ ، ٨ ، ٦ ، ٤ ، ٣ } وكانت ع علاقة  
 من س إلى ص حيث أ ع ب تعني أن  $\frac{1}{4} = \frac{1}{4} = \frac{1}{4}$  ب  
 اكتب بيان ع ومثلها بمخطط سهمي

### الحل

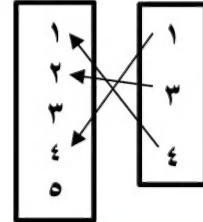
اختر الأزواج التي فيها المسقط الأول نصف الثاني  
 بيان ع =

### مثال ١

إذا كانت س = { ٤ ، ٣ ، ١ } ،  
 ص = { ١ ، ٢ ، ٣ ، ٤ ، ٥ } وكانت ع علاقة من  
 س إلى ص حيث أ ع ب تعني أن  $٥ = ١ + ٤ = ٥$   
 اكتب بيان ع ومثلها بمخطط سهمي

إعمل س × ص في دماغك واختار منها الأزواج التي  
 ينطبق عليها الشرط  $٥ = ١ + ٤ = ٥$  يعني المسقط الأول +  
 المسقط الثاني = ٥

بيان ع = { (١،٤) ، (٢،٣) ، (٤،١) }



## متي تكون العلاقة دالة ؟!

- ◆ يمكن أن تكون العلاقة دالة ويمكن أن تكون ليست دالة، فكل دالة هي علاقة وليست كل علاقة دالة.
- ◆ يقال لعلاقة من مجموعة س إلى مجموعة ص أنها دالة إذا تحقق الآتي:
- ❖ إذا ظهر كل عنصر من عناصر س كمسقط أول مرة واحدة فقط (في بيان ع)
- ❖ أو إذا خرج من كل عنصر من عناصر س سهم واحد فقط (في المخطط السهمي)
- ◆ إذا كانت العلاقة دالة فإن الدالة لها مدى: ومدى الدالة هو عناصر المسقط الثاني في بيان العلاقة
- إذا كانت العلاقة ليست دالة فإنه ليس لها مدى

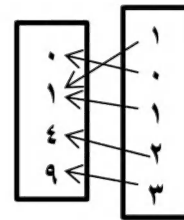


١

إذا كانت  $S = \{3, 2, 1, 0, -1\}$  وكانت  $E = \{9, 6, 4, 1, 0\}$  وكانت ع علاقة من  $S$  إلى  $S$  حيث أ ع ب تعنى أن "أ = ٢ ب" اكتب بيان ع ومثلها بمخطط سهمي، وهل ع دالة أم لا ، ولماذا؟ وإذا كانت دالة اكتب مداها.

الحل

بيان ع =  $\{(9, 3), (4, 2), (1, 1), (0, 0), (1, -1)\}$



• ع دالة

• لأن كل عنصر من  $S$  خرج منه سهم واحد فقط.  
أو لأن كل عنصر من  $S$  ظهر كمسقط أول مرة واحدة فقط.

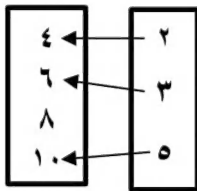
• المدى =  $\{9, 4, 1, 0\}$ 

٢

إذا كانت  $S = \{5, 3, 2\}$  وكانت  $E = \{10, 8, 6, 4\}$  وكانت ع علاقة من  $S$  إلى  $S$  حيث أ ع ب تعنى أن "أ = ٢ ب" اكتب بيان ع ومثلها بمخطط سهمي (١) بين أن ع دالة واكتب مداها (٢)

الحل

بيان ع =  $\{(10, 5), (6, 3), (4, 2)\}$



• ع دالة

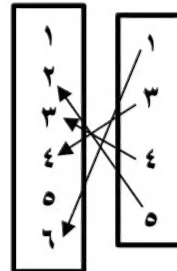
• لأن كل عنصر من  $S$  خرج منه سهم واحد فقط.• المدى =  $\{10, 6, 4\}$ 

٣

إذا كانت  $S = \{5, 4, 3, 1\}$  وكانت  $E = \{6, 5, 4, 3, 2, 1\}$  وكانت ع علاقة من  $S$  إلى  $S$  حيث أ ع ب تعنى أن  $٧ = أ + ب$  اكتب بيان ع ومثلها بمخطط سهمي (١) بين أن ع دالة واكتب مداها (٢)

الحل

بيان ع =  $\{(2, 5), (3, 4), (4, 3), (6, 1)\}$



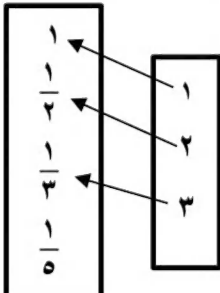
• ع دالة

• لأن كل عنصر من  $S$  خرج منه سهم واحد فقط.• المدى =  $\{6, 4, 3, 0, 2\}$ 

٤

إذا كانت  $S = \{3, 2, 1\}$  وكانت  $E = \{1/5, 1/3, 1/2, 1\}$  وكانت ع علاقة من  $S$  إلى  $S$  حيث أ ع ب تعنى أن العدد أ هو المعكوس الضربي للعدد ب اكتب بيان ع ومثلها بمخطط سهمي (١) بين أن ع دالة واكتب مداها (٢)

بيان ع =  $\{(1/3, 3), (1/2, 2), (1, 1)\}$



• ع دالة

• لأن كل عنصر من  $S$  خرج منه سهم واحد فقط.• المدى =  $\{1/3, 1/2, 1\}$

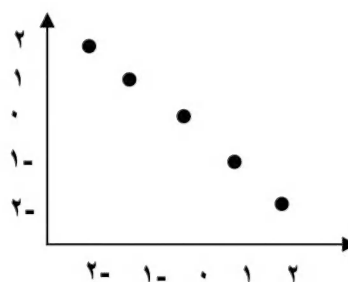


٥

إذا كانت  $S = \{2, 1, 0, 1, -2\}$  وكانت  $E$  علاقة معرفة على  $S$  حيث  $A \in B$  تعني أن العدد  $A$  معكوس جمعي للعدد  $B$  اكتب بيان  $E$  ومثلها بمخطط بياني هل  $E$  دالة أم لا؟ ولماذا؟ وإذا كانت دالة اكتب مداها

الحل

بيان  $E = \{(2, -2), (1, -1), (0, 0), (1, 1), (2, 2)\}$



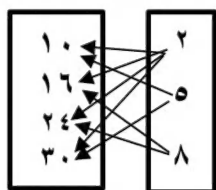
- $E$  دالة
- لأن كل عنصر من  $S$  ظهر في بيان  $E$  كمسقط أول مرة واحدة فقط.
- المدى  $= \{2, 1, 0, 1, -2\}$

٦

إذا كانت  $S = \{8, 5, 2\}$ ،  $V = \{30, 24, 16, 10\}$  وكانت  $E$  علاقة من  $S$  إلى  $V$  حيث  $A \in B$  تعني أن " $A$  عامل من عوامل  $B$ " لكل  $A \in S$ ،  $B \in V$  اكتب بيان  $E$  ومثلها بمخطط سهمي. هل  $E$  دالة؟ ولماذا؟

الحل

بيان  $E = \{(30, 2), (24, 2), (16, 2), (10, 2), (30, 5), (24, 5), (16, 5), (10, 5)\}$



- $E$  ليست دالة
- لأنه يوجد عنصر من  $S$  خرج منه أكثر من سهم.
- لاحظ هنا أنه لا يوجد مدى لأن العلاقة ليست دالة.

٧

إذا كانت  $S = \{5, 3, 1\}$  وكانت  $E$  علاقة معرفة على  $S$

وكان بيان  $E = \{(5, 1), (1, 3), (3, 5)\}$

(١) أوجد مدى الدالة

(٢) أوجد القيمة العددية للمقدار  $A + B$

الحل

مدى الدالة هو الأرقام الموجودة في المسقط الثاني

المدى  $= \{5, 1, 3\}$

العلاقة دالة يبقى لازم كل عنصر من  $S$  يظهر كمسقط أول مرة واحدة فقط ..  
العنصر ١ ظهر يبقى  $A$ ،  $B$  هما ٣، ٥

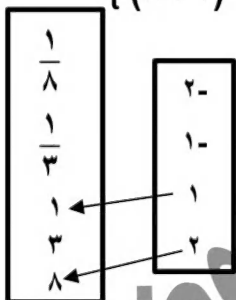
$$A + B = 3 + 5 = 8$$

٨

إذا كانت  $S = \{2, 1, -1, -2\}$ ،  $V = \{\frac{1}{8}, \frac{1}{3}, 1, 3\}$  وكانت  $E$  علاقة من  $S$  إلى  $V$  حيث  $A \in B$  تعني أن " $A = 3B$ " اكتب بيان  $E$  ومثلها بمخطط سهمي، وهل  $E$  دالة أم لا، ولماذا؟

الحل

بيان  $E = \{(8, 2), (1, 1)\}$



- $E$  ليست دالة
- لأنه يوجد عنصر من  $S$  لم يخرج منه أسهم.



## الدالة

- يرمز للدالة بالرمز د أو ر أو ق
- إذا كانت د دالة من س إلى ص فإنها تكتب د : س ← ص ويكون :
  - ❖ **المجال**: هو عناصر المجموعة س
  - ❖ **المجال المقابل**: هو عناصر المجموعة ص
  - ❖ **المدى**: هو مجموعة صور عناصر المجال (وهو مجموعة جزئية من المجال المقابل)
- قاعدة الدالة: تكون مثل: د(س) = ٢س ، د(س) = ١ + س ، د(س) = ٢س + ٢س - ٣ وهكذا
- لاحظ أن : د(س) هي نفسها ص أي أن : د(س) = ص

### مثال ١

إذا كانت د : س ← ص ، س = { ٣ ، ٥ ، ٧ }  
 ص = { ٩ ، ١٢ ، ١٥ ، ٢١ }  
 بيان د = { (٣ ، ٩) ، (٥ ، ١٥) ، (٧ ، ٢١) }  
 فأوجد : ١- مجال الدالة ٢- المجال المقابل  
 ٣- مدى الدالة ٤- قاعدة الدالة

### الحل

- ١- مجال الدالة = { ٣ ، ٥ ، ٧ }
- ٢- المجال المقابل = { ٩ ، ١٢ ، ١٥ ، ٢١ }
- ٣- مدى الدالة = { ٩ ، ١٥ ، ٢١ }
- ٤- قاعدة الدالة هي : د(س) = ٣س

### مثال ٢

إذا كان بيان الدالة د = { (١ ، ٣) ، (٢ ، ٥) }  
 { (٣ ، ٧) ، (٤ ، ٩) ، (٥ ، ١١) }  
 فأوجد : ١- مجال ومدى الدالة  
 ٢- قاعدة الدالة

- ♦ مجال الدالة = { ١ ، ٢ ، ٣ ، ٤ ، ٥ }
- ♦ مدى الدالة = { ٣ ، ٥ ، ٧ ، ٩ ، ١١ }
- ♦ قاعدة الدالة هي : د(س) = ٢س + ١

## ملاحظات على التعويض في الدالة

- عند التعويض عن عدد سالب في س<sup>٢</sup> نضع العدد بين قوسين فمثلاً إذا كانت س = -٣ فإن س<sup>٢</sup> = (-٣)<sup>٢</sup> = ٩
- يمكن التعويض في قاعدة الدالة عن قيمة س أو قيمة ص أو كلاهما ويمكن الاستعانة بالآتي:
- ١ إذا كان (٢ ، ٥) ينتمي لبيان الدالة: فإننا نعوض في قاعدة الدالة عن س = ٢ ، د(س) أو ص = ٥
- ٢ إذا كان د(٣) = ٧ فإننا نعوض في قاعدة الدالة عن س = ٣ ، د(س) أو ص = ٧







◆ الدالة كثيرة الحدود هي دالة تتكون من حد أو أكثر ويجب توافر شرطان لتكون كثيرة حدود وهما:

١ كل من المجال والمجال المقابل للدالة هو ح

٢ أسس المتغير  $s$  و  $t$  ، أي لا يوجد بالدالة كثيرة الحدود جذر أو مجهول في المقام أو أس سالب

◆ أمثلة لدوال كثيرات حدود:

مثل:  $(s) = s^2 + 1$  ،  $(s) = s^3 + 2s - 2$  ،  $(s) = s^3 - 8$

◆ أمثلة لدوال ليست كثيرات حدود :

مثل:  $(s) = s^2 + \sqrt{s} + 8$  ،  $(s) = s(s + \frac{1}{s} + 2)$

### درجة الدالة

هي درجة أكبر أس في الدالة (بعد التبسيط)

- الدالة د:  $(s) = s^4 + 2s^3 + 5$  دالة كثيرة حدود من الدرجة الرابعة
- الدالة د:  $(s) = s^2 + 2s - 1$  دالة كثيرة حدود من الدرجة الثانية (تسمى دالة تربيعية)
- الدالة د:  $(s) = s + 3$  دالة كثيرة حدود من الدرجة الأولى (تسمى دالة خطية)
- الدالة د:  $(s) = 7$  دالة كثيرة حدود من الدرجة الصفرية (تسمى دالة ثابتة)

مثال ١: الدالة د:  $(s) = s^2(s + 2)$  دالة كثيرة حدود من الدرجة .....

الحل: نبسط الدالة فتكون:  $(s) = s^3 + 2s^2$  ∴ دالة من الدرجة الثالثة

مثال ٢: الدالة د:  $(s) = s^2 - (s^3 + s - 1)$  دالة كثيرة حدود من الدرجة .....

الحل: نبسط الدالة فتكون:  $(s) = s^2 - s^3 - s + 1 = 1 - s^3 - s$  ∴ دالة من الدرجة الأولى

**مثال ٢** إذا كانت  $(s) = 2s^2 - 5s + 2$  (١) اذكر درجة الدالة د (٢) أثبت أن د (٢) =  $(\frac{1}{4})$

الحل

■ الدالة د من الدرجة الثانية  
 ■ د (٢) =  $2 \times 2^2 - 5 \times 2 + 2 = 2$  صفر  
 د  $(\frac{1}{4}) = 2 \times (\frac{1}{4})^2 - 5 \times (\frac{1}{4}) + 2 = 2 - \frac{5}{4} + 2 = \frac{1}{4}$  صفر  
 ∴ د (٢) = د  $(\frac{1}{4})$

**مثال ١** إذا كان  $(s) = s^2 - 3s + 3$  فأوجد: د (٢-) ، د (٠) ، د  $(\sqrt[3]{3})$

الحل

عوض ثم استعن بالآلة الحاسبة  
 د (٢-) =  $(2-) = 2 - 3 + 3 = 2$   
 د (٠) =  $0 - 0 + 3 = 3$   
 د  $(\sqrt[3]{3}) = 3 - 3\sqrt[3]{3} + 3 = 6 - 3\sqrt[3]{3}$   
 $3\sqrt[3]{3} - 12 = 3 + 3\sqrt[3]{3} - 9 =$



♦ الدالة الخطية هي دالة من الدرجة الأولى

مثل: د(س) = ٢س ، د(س) = س - ١ ، د(س) = ٥س + ٣

♦ تكون على الصورة د(س) = أس + ب حيث  $أ \neq ٠$  وتمثل بيانيا بخط مستقيم بحيث يكون:

- نقطة تقاطع المستقيم مع محور الصادات هي (٠ ، ب)
- نقطة تقاطع المستقيم مع محور السينات هي  $(٠ ، -\frac{ب}{أ})$

فمثلا: إذا كانت د: د(س) = ٢س - ٥ فإن  $أ = ٢$  ،  $ب = -٥$  ومنها فإن :

- نقطة تقاطع المستقيم مع محور الصادات هي (٠ ، -٥)
- نقطة تقاطع المستقيم مع محور السينات هي  $(٠ ، \frac{٥}{٢})$

♦ وبطريقة أخرى يمكن إيجاد نقطة تقاطع المستقيم مع محور الصادات بالتعويض عن س = ٠ ونقطة تقاطع المستقيم مع محور السينات بالتعويض عن ص = ٠

❖ إذا كان المستقيم الممثل للدالة يقطع محور السينات ← نفهم أن المسقط الثانى ص = صفر

❖ إذا كان المستقيم الممثل للدالة يقطع محور الصادات ← نفهم أن المسقط الأول س = صفر

مثال

مثل بيانيا الدالة د(س) = ٣س - ١  
وأوجد نقطة تقاطع المستقيم مع محوري الإحداثيات

الحل

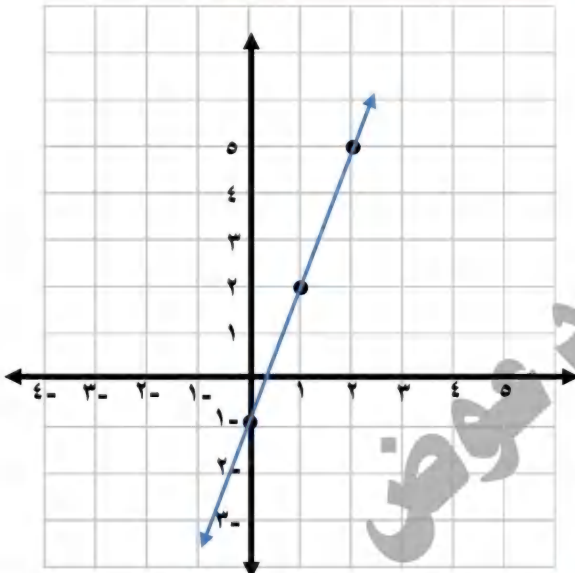
في الدالة الخطية نفرض أى ٣ قيم لـ س

س	٣س - ١	ص
٠	٣ × ٠ - ١	-١
١	٣ × ١ - ١	٢
٢	٣ × ٢ - ١	٥

من قاعدة الدالة:  $أ = ٣$  ،  $ب = -١$

∴ نقطة التقاطع مع محور السينات  $(٠ ، -\frac{ب}{أ})$  هي  $(٠ ، \frac{١}{٣})$

، نقطة التقاطع مع محور الصادات (ب ، ٠) هي (٠ ، -١)

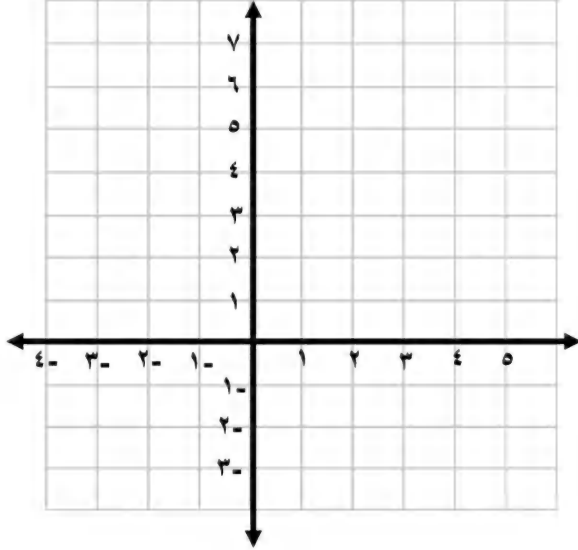




## تدريب ١

مثل بيانيا الدالة د:  $د(س) = ٢س - ٣$   
وأوجد نقطة تقاطع المستقيم مع محوري الإحداثيات

### الحل



ص	٢س - ٣	س

## الدالة الثابتة

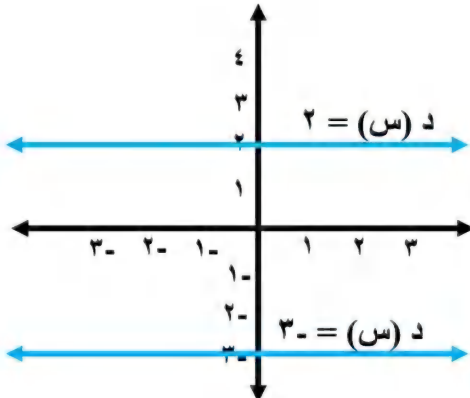
❖ الدالة د:  $ح ← ح$  حيث د(س) = ب ، ب د ح تسمى دالة ثابتة وهى من الدرجة الصفرية

مثل: د(س) = ٧ ، د(س) = ٥ ، د(س) = ٢ وهكذا

❖ إذا كانت د(س) = ٥ فإن د(١) = ٥ ، د(٥) = ٥ ، د(٥-) = ٥ ، د(٠) = ٥ وهكذا

فمثلا: إذا كانت د(س) = ٧ فإن د(٣) + د(٣-) = ٧ + ٧ = ١٤

❖ الدالة الثابتة تمثل بيانيا بخط مستقيم يوازي محور السينات



### الحل

◆ مثال ١: مثل بيانيا الدالة د(س) = ٢

◆ مثال ٢: مثل بيانيا الدالة د(س) = ٣-



## الدالة التربيعية

❖ الدالة التربيعية هي دالة كثيرة حدود من الدرجة الثانية

❖ الدالة د: ح حيث  $D(s) = As^2 + Bs + C$  تسمى دالة تربيعية

مثل:  $D(s) = s^2$  ،  $D(s) = -s^2$  ،  $D(s) = s^2 - 5$  ،  $D(s) = s^2 - 2s + 1$

### ملاحظات هامة

❶ إذا كان معامل  $s^2$  موجب فإن المنحنى يكون مفتوح لأعلى وله قيمة صغرى

❷ إذا كان معامل  $s^2$  سالب فإن المنحنى يكون مفتوح لأسفل وله قيمة عظمى

❸ رأس المنحنى: تحدد من الرسم أو من قاعدة الدالة  $D(s) = As^2 + Bs + C$  بالقانون:

$$\text{نقطة رأس المنحنى} = \left( -\frac{B}{2A}, -\frac{B^2 - 4AC}{4A} \right)$$

❹ من نقطة رأس المنحنى نأخذ:

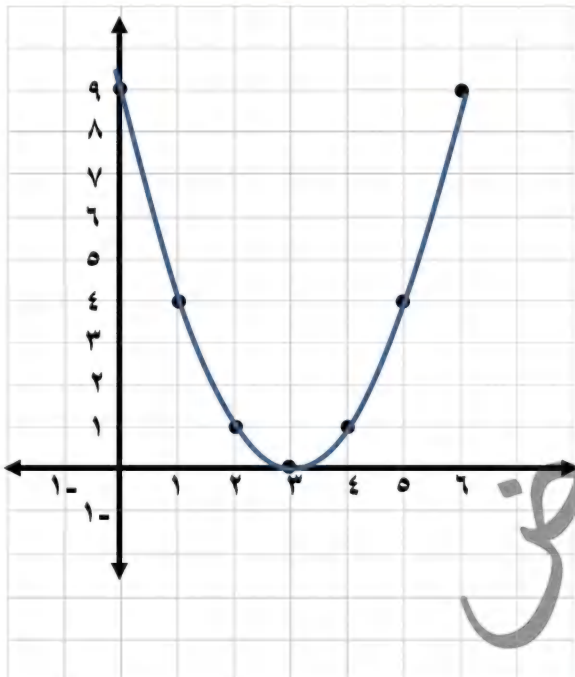
- قيمة  $s$  هي معادلة محور التماثل
- قيمة  $v$  هي القيمة الصغرى أو العظمى

مثال ١ مثل بيانها الدالة  $D(s) = (s - 3)^2$  متخذاً  $s \in [0, 6]$

ومن الرسم استنتج:

(١) نقطة رأس المنحنى (٢) القيمة الصغرى أو العظمى (٣) معادلة محور التماثل

### الحل



ص	$(s - 3)^2$	س
٩	$(3 - 0)^2$	٠
٤	$(3 - 1)^2$	١
١	$(3 - 2)^2$	٢
٠	$(3 - 3)^2$	٣
١	$(3 - 4)^2$	٤
٤	$(3 - 5)^2$	٥
٩	$(3 - 6)^2$	٦

رأس المنحنى =  $(3, 0)$

معادلة محور التماثل  $s = 3$

القيمة الصغرى = ٠



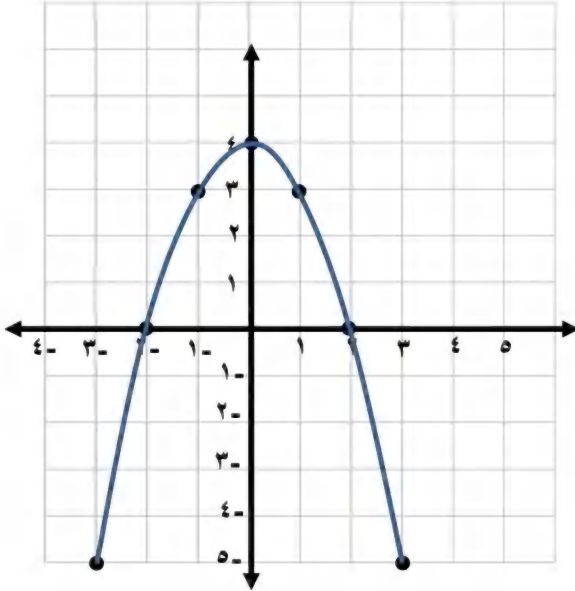
مثال ٢

مثل بيانيا الدالة  $D(s) = s^2 - 4$  متخذاً  $s \in [-3, 3]$

ومن الرسم استنتج :

(٢) نقطة رأس المنحنى (٢) القيمة الصغرى أو العظمى (٣) معادلة محور التماثل

الحل



ص	$s^2 - 4$	س
٥-	$^2(3-) - 4$	٣-
٠	$^2(2-) - 4$	٢-
٣	$^2(1-) - 4$	١-
٤	$^2(0) - 4$	٠
٣	$^2(1) - 4$	١
٠	$^2(2) - 4$	٢
٥-	$^2(3) - 4$	٣

رأس المنحنى  $(0, -4)$

معادلة محور التماثل  $s = 0$

القيمة العظمى  $-4$

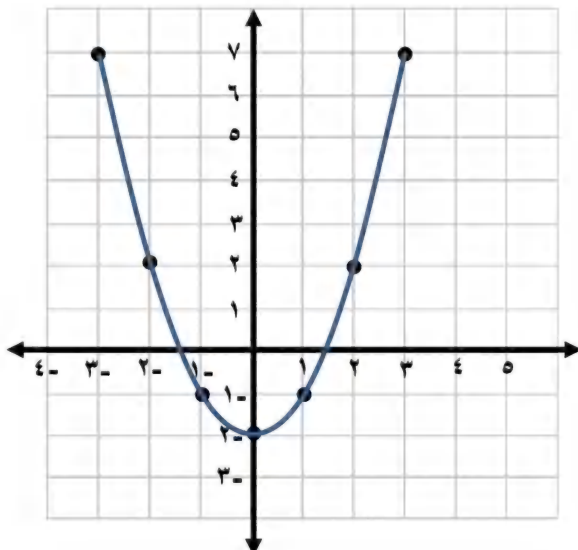
مثال ٣

مثل بيانيا الدالة  $D(s) = s^2 - 2$  متخذاً  $s \in [-3, 3]$

ومن الرسم استنتج :

(٣) نقطة رأس المنحنى (٢) القيمة الصغرى أو العظمى (٣) معادلة محور التماثل

الحل



ص	$s^2 - 2$	س
٧	$^2(3-) - 2$	٣-
٢	$^2(2-) - 2$	٢-
١-	$^2(1-) - 2$	١-
٢-	$^2(0) - 2$	٠
١-	$^2(1) - 2$	١
٢	$^2(2) - 2$	٢
٧	$^2(3) - 2$	٣

رأس المنحنى  $(0, -2)$

معادلة محور التماثل  $s = 0$

القيمة الصغرى  $-2$



**تدريب ١** مثل بيانيا الدالة  $D(s) = s^2 + 2s + 1$  متخذاً  $s \in [-4, 2]$  ومن الرسم استنتج :  
(١) نقطة رأس المنحنى (٢) القيمة الصغرى أو العظمى (٣) معادلة محور التماثل



ص	$s^2 + 2s + 1$	س

رأس المنحنى =

معادلة محور التماثل:

القيمة الصغرى =

**تدريب ٢** مثل بيانيا الدالة  $D(s) = s^2 - 3s$  متخذاً  $s \in [-3, 3]$  ومن الرسم استنتج :  
(١) نقطة رأس المنحنى (٢) معادلة محور التماثل (٣) القيمة الصغرى أو العظمى



ص	$s^2 - 3s$	س
-٩	$-(3^2)$	-٣

رأس المنحنى =

معادلة محور التماثل:

القيمة الصغرى =



## أسئلة اختر على الوحدة الأولى

- ١ إذا كان  $(٢، س - ١) = (ص، ٠)$  فإن  $س + ص =$  .....  
 (أ) ٣ (ب) ١ (ج) ٢ (د) ٣-
- ٢ إذا كانت  $(س - ١، ١١) = (٨، ص + ٣)$  فإن  $\sqrt{س + ٢} =$  .....  
 (أ) ٣ (ب) ٥ (ج) ٩ (د) ٢٥
- ٣ إذا كان  $(٥، ٣) \in \{٦، ٣\} \times \{٨، س\}$  فإن  $س =$  .....  
 (أ) ٨ (ب) ٦ (ج) ٥ (د) ٣
- ٤ النقطة  $(٣ -، ٤)$  تقع في الربع .....  
 (أ) الأول (ب) الثاني (ج) الثالث (د) الرابع
- ٥ إذا كانت  $س = \{٢\}$ ،  $ص = \{٣\}$  فإن  $س \times ص =$  .....  
 (أ) ٦ (ب)  $\{٣\}$  (ج)  $(٣، ٢)$  (د)  $\{(٣، ٢)\}$
- ٦ إذا كان  $ن(س) = ٣$ ،  $ن(س \times ص) = ١٢$  فإن  $ن(ص) =$  .....  
 (أ) ٤ (ب) ٩ (ج) ١٥ (د) ٣٦
- ٧ إذا كان  $ن(س) = ٢$ ،  $ن(ص \times س) = ٦$  فإن  $ن(ص) =$  .....  
 (أ) ٤ (ب) ٩ (ج) ١٦ (د) ١٢
- ٨ إذا كانت  $ن(س) = ٩$  فإن  $ن(س) =$  .....  
 (أ) ٣ (ب) ٦ (ج) ٩ (د) ١٢
- ٩ إذا كانت النقطة  $(س - ٢، ٤ - س)$  تقع في الربع الثالث فإن  $س =$  .....  
 (أ) ٢ (ب) ٣ (ج) ٤ (د) ٦
- ١٠ إذا كانت النقطة  $(٥، ب - ٧)$  تقع على محور السينات فإن  $ب =$  .....  
 (أ) ٢ (ب) ٥ (ج) ٧ (د) ١٢
- ١١ إذا كانت  $د(س) = ٧$  فإن  $د(٣ -) =$  .....  
 (أ) ٧ (ب) ٧- (ج) ٢١ (د) ٢١-
- ١٢ الدالة  $د : د(س) = ٣$  س يمثلها بيانيا خط مستقيم يمر بالنقطة .....  
 (أ)  $(٠، ٣)$  (ب)  $(٠، ٠)$  (ج)  $(٣، ٠)$  (د)  $(٣، ٣)$

نصم  
مدوموعوش  
معلم أول رياضيات

### الحل

- المنحنى يمر بالنقطة  $(٤، ٠)$  بالتعويض في الدالة  
 $\therefore ٤ = م - ٢٠ \therefore م = ٢٤$
- إحداثي ب هو  $(س، ٠)$  بالتعويض في الدالة  
 $\therefore ٠ = م - ٢س \therefore م = ٢س \therefore ٢س \pm ٢ = ٢٤$   
 $\therefore$  إحداثي ب  $(٠، ٢)$ ، إحداثي ج  $(٠، ٢-)$
- مساحة المثلث  $= \frac{1}{2} \times \text{طول القاعدة} \times \text{الارتفاع}$   
 $= \frac{1}{2} \times ٤ \times ٨ = ١٦$  وحدات مربعة

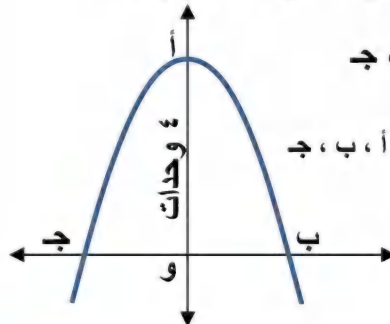
### متفوقين

الشكل المقابل يمثل منحنى الدالة د حيث:

د(س) = م - س<sup>٢</sup> فإذا كان أ و ٤ وحدات فأوجد:

(١) قيمة م (٢) إحداثي ب، ج

(٣) مساحة المثلث الذي رؤوسه أ، ب، ج





الدالة	حاصل ضرب الديكارتى
<b>١</b> إذا كان بيان الدالة $D = \{(3,1), (5,2), (7,3)\}$ ، $\{(9,4), (11,5)\}$ ، (١) اكتب مجال ومدى الدالة د (٢) اكتب قاعدة الدالة	<b>١</b> إذا كانت $(س - ١, ٢٩) = (٤, ص + ٢ + ١)$ فأوجد قيمة $س + ٢$ ص
<b>٢</b> إذا كانت د $(س) = س^٢ - ٣س$ ، $ر (س) = س - ٣$ (١) أوجد د(٢) + ر(٢) (٢) اثبت أن د (٣) + ر (٣) = صفر	<b>٢</b> إذا كانت $س = \{١, ٢\}$ ، $ص = \{٢, ٥\}$ $ع = \{٥, ٤\}$ فأوجد: (١) $(س - ص) \times ع$ (٢) $ن (ع)$
<b>٣</b> إذا كانت الدالة د حيث د $(س) = ٥س + ٤$ يمثلها بيانيا خط مستقيم يمر بالنقطة (٣ ، ب) فأوجد قيمة ب	<b>٣</b> إذا كانت $س \times ص = \{(٦,٢), (٩,٢), (٦,٣)\}$ ، فأوجد: (١) $س$ ، $ص$ (٢) $ص \times س$ (٣) $ن (س)$
<b>٤</b> إذا كانت د $(س) = ٣س + ب$ ، د $(٤) = ١٣$ فأوجد قيمة ب	العلاقة
<b>٥</b> إذا كان المستقيم الذى يمثل الدالة د: ح ح حيث د $(س) = ٢س + أ$ ، د $(٣) = ٩$ (١) أوجد قيمة أ (٢) أوجد نقطة تقاطع المستقيم مع المحور السيني	<b>١</b> إذا كانت $س = \{١, ٢, ٤, ٥\}$ ، $ص = \{١, ٤, ٦\}$ وكانت ع علاقة من س إلى ص حيث أ ع ب تعنى: $أ = ٢$ ب لكل أ د س ، ب د ص (١) اكتب بيان ع ومثله بمخطط سهمي (٢) هل ع دالة أم لا؟ ولماذا؟
التمثيل البيانى لدوال كثيرات الحدود	<b>٢</b> إذا كانت $س = \{١, ٢, ٣, ٤\}$ $ص = \{ص : ص \geq ٢, دط, ٩ > ص\}$ ، وكانت ع علاقة من س إلى ص حيث أ ع ب تعنى: $(أ = \frac{١}{٢} ب)$ لكل أ د س ، ب د ص (١) اكتب بيان ع ومثله بمخطط سهمي (٢) بين أن ع دالة وأوجد مداها؟
<b>١</b> مثل بيانيا الدالة د $(س) = ٢س + ١$ ثم أوجد نقط تقاطع المستقيم الممثل للدالة مع محورى الإحداثيات	<b>٣</b> إذا كانت $س = \{١, ٢, ٣\}$ ، $ص = \{١, \frac{١}{٢}, \frac{١}{٣}, \frac{١}{٥}\}$ وكانت ع علاقة من س إلى ص حيث أ ع ب تعنى أن $أ ب = ١$ لكل أ د س ، ب د ص (١) اكتب بيان ع ومثله بمخطط سهمي (٢) بين أن ع دالة واكتب مداها
<b>٢</b> ارسم منحنى الدالة د: د $(س) = ٢س + ١$ متخذاً س $د [٢, -٢]$ ومن الرسم عين: (١) نقطة رأس المنحنى (٢) معادلة محور التماثل (٣) القيمة الصغرى أو العظمى	
<b>٣</b> مثل بيانيا منحنى الدالة د $(س) = ٣ - س^٢$ حيث س $د [٣, -٣]$ ومن الرسم أوجد: (١) معادلة محور التماثل (٢) القيمة العظمى أو الصغرى	



## اختبار على الوحدة الأولى

إعداد أ / محمود عوض

**السؤال الأول:** اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة:

- ١ إذا كانت النقطة (٣ ، ب - ٥) تقع على محور السينات فإن ب = .....  
(أ) ٢ (ب) ٥ (ج) ٦ (د) ٨
- ٢ إذا كان  $\{2\} \times \{أ، ب\} = \{(٤، ٢)، (٣، ٢)\}$  فإن أ - ب = .....  
(أ) ١ (ب) -١ (ج)  $١ \pm$  (د) صفر
- ٣ الدالة د حيث د (س) = ٥س يمثلها بيانيا خط مستقيم يمر بالنقطة .....  
(أ) (٥، ٠) (ب) (٥، ٥) (ج) (٠، ٥) (د) (٠، ٠)
- ٤ إذا كانت ص = { صفر } فإن ن (ص) = .....  
(أ) صفر (ب) ١ (ج) ٢ (د) ٤

**السؤال الثاني:**

(أ) إذا كانت س = { ١ ، ٢ ، ٣ } ، ص = { ١ ، ٣ ، ٦ ، ٩ ، ١٢ } وكانت ع علاقة من س إلى ص  
حيث أع ب تعنى  $أ = \frac{١}{٣} ب$  لكل أ ∈ س ، ب ∈ ص  
اكتب بيان ع ومثله بمخطط سهمي وبين أن ع دالة واكتب مداها.

(ب) مثل بيانيا الدالة الخطية د: ح — ح حيث د (س) = س + ٢  
وأوجد نقط تقاطع المستقيم مع محوري الإحداثيات

**السؤال الثالث:**

(أ) إذا كان (٤ ، س) = (٨ ، ص + ١) فأوجد قيمة  $\sqrt{س + ص}$   
(ب) إذا كان  $س \times ص = \{(٢، ١)، (٣، ١)، (٢، ٢)، (٣، ٢)\}$   
فأوجد: (١) س ∪ ص (٢) ص ∩ س

**السؤال الرابع:**

(أ) إذا كانت الدالة د حيث د (س) = ٣س + ٤ يمثلها بيانيا خط مستقيم يمر بالنقطة (أ ، -٥)  
فأوجد: (١) د  $(\frac{٢}{٣})$  (٢) قيمة أ  
(ب) مثل بيانيا الدالة د حيث د (س) = س - ١ حيث س ∈ [-٢ ، ٢] ومن الرسم استنتج:  
(١) معادلة محور التماثل (٢) القيمة الصغرى للدالة



◆ النسبة هي مقارنة بين كميتين من نفس النوع، النسبة بين أ، ب تكتب أ : ب أو  $\frac{أ}{ب}$

يسمى أ : مقدم النسبة ، ب : تالي النسبة ، أ ، ب معا : حدى النسبة

◆ النسبة لا تتغير إذا ضرب حديها في عدد حقيقي (ما عدا الصفر)

$$\text{فمثلا: } \frac{6}{10} = \frac{2 \times 3}{2 \times 5} = \frac{3}{5}$$

◆ النسبة تتغير إذا أضيف أو طرح من حديها عدد حقيقي (ما عدا الصفر)

$$\text{فمثلا: } \frac{5}{7} \neq \frac{2+3}{2+5} \neq \frac{3}{5} \text{ تغيرت النسبة}$$

◆ إذا كانت النسبة بين عددين ٣ : ٤ فإننا نفرض أن العددين هما ٣م ، ٤م

٢ أوجد العدد الذى إذا أضيف إلى حدى النسبة ٧ : ١١

فإنها تصبح ٣ : ٢

الحل

نفرض أن العدد = س

$$\frac{2}{3} = \frac{7+س}{11+س} \text{ (مقص)}$$

$$22 + 2س = 21 + 3س$$

$$21 - 22 = 3س - 2س$$

$$-1 = س \therefore \text{العدد هو } 1$$

١ عددان صحيحان النسبة بينهما ٣ : ٧ ، إذا طرح منهما ٥

أصبحت النسبة بينهما ١ : ٣ ، أوجد العددين؟

نفرض أن العددين هما ٣م ، ٧م

$$\therefore \frac{1}{3} = \frac{5-3م}{5-7م} \text{ (مقص)}$$

$$5 - 7م = 15 - 9م$$

$$15 + 5 = 7م - 9م$$

$$10 = 2م \quad 5 = م$$

$$\therefore \text{العدد الأول} = 3م = 3 \times 5 = 15$$

$$\therefore \text{العدد الثانى} = 7م = 7 \times 5 = 35$$

٤ أوجد العدد الموجب الذى إذا طرح ثلاثة أمثاله من

حدى النسبة  $\frac{49}{69}$  فإنها تصبح  $\frac{2}{3}$

الحل

نفرض أن العدد = س  $\therefore$  ثلاثة أمثاله = ٣س

$$\frac{2}{3} = \frac{49-3س}{69-3س} \text{ (مقص)}$$

$$2(69-3س) = 3(49-3س)$$

$$138 - 6س = 147 - 9س$$

$$138 - 147 = 9س - 6س$$

$$-9 = 3س \therefore س = -3$$

٣ أوجد العدد الموجب الذى إذا أضيف مربعه إلى

حدى النسبة ٥ : ١١ فإنها تصبح ٣ : ٥

الحل

نفرض أن العدد = س  $\therefore$  مربعه = ٢س

$$\frac{3}{5} = \frac{5+2س}{11+2س} \text{ (مقص)}$$

$$3(11+2س) = 5(5+2س)$$

$$33 + 6س = 25 + 10س$$

$$33 - 25 = 10س - 6س$$

$$8 = 4س \therefore س = 2 \pm \therefore \text{العدد الموجب هو } 2$$



## التناسب

◆ التناسب هو تساوى نسبتين أو أكثر

فمثلاً:  $\frac{أ}{ب} = \frac{ج}{د}$  يسمى تناسب والكميات أ، ب، ج، د تسمى كميات متناسبة

◆ إذا كانت أ، ب، ج، د كميات متناسبة فإن:  $\frac{أ}{ب} = \frac{ج}{د}$  حيث:

أ: الأول المتناسب ، ب: الثانى المتناسب ، ج: الثالث المتناسب ، د: الرابع المتناسب  
أ، د: الطرفين ، ب، ج: الوسيطين

## خواص التناسب

خاصية ١ حاصل ضرب الطرفين = حاصل ضرب الوسيطين

أي أنه إذا كانت  $\frac{أ}{ب} = \frac{ج}{د}$  فإن:  $أ \times د = ب \times ج$

وغالباً ما تستخدم عند وجود مجهول واحد في التناسب مثل:  $\frac{س}{٣} = \frac{٤}{٦}$  أو  $\frac{س - ٢}{٣ + س} = \frac{٧ + س}{١١ + س}$

تدريب

أوجد الثانى المتناسب للأعداد ٢ ، ٤ ، ٦

مثال ١

أوجد الرابع المتناسب للأعداد ٤ ، ١٢ ، ١٦

الحل

نفرض أن الرابع المتناسب هو س

الكميات هي: ٤ ، ١٢ ، ١٦ ، س

$$\frac{١٦}{س} = \frac{٤}{١٢} \therefore$$

حاصل ضرب الطرفين = حاصل ضرب الوسيطين

$$١٦ \times ١٢ = س \times ٤$$

$$س = \frac{١٦ \times ١٢}{٤} = ٤٨$$

∴ الرابع المتناسب هو ٤٨



## مثال ٢

أوجد العدد الذي إذا أضيف إلى كل من الأعداد ١٢، ٨، ٥، ٣ فإنها تكون متناسبة

## الحل

نفرض أن العدد = س

$$\frac{٨ + س}{١٢ + س} = \frac{٣ + س}{٥ + س}$$

حاصل ضرب الطرفين = حاصل ضرب الوسطين

$$٤٠ + س٨ + س٥ + س٢ = ٣٦ + س١٢ + س٣ + س٢$$

$$٤٠ + س١٣ = ٣٦ + س١٥$$

$$٣٦ - ٤٠ = س١٣ - س١٥$$

$$٢ = س٤ \leftarrow \therefore \text{العدد هو } ٢$$

## تدريب

أوجد العدد الذي إذا أضيف إلى كل من الأعداد ١٨، ٤، ١٢، ٢ فإنها تكون متناسبة

## خاصية ٢

إذا كان  $أ ج = ب د$  فإن  $\frac{أ}{ب} = \frac{ج}{د}$  في كل طرف ثبت حاجة وانقل الثانية

■ مثال ١: إذا كان  $٥ أ = ٧ ب$  فإن  $\frac{أ}{٥} = \frac{ب}{٧}$  ،

■ مثال ٢: إذا كان  $٢ س - ٣ ص = ٠$  فإن  $٢ س = ٣ ص$  ومنها  $\frac{٢}{٣} = \frac{س}{ص}$  ،

🌟 تدريب: إذا كان  $٣ أ = ٤ ب$  فإن  $أ : ب = \dots\dots\dots$

## خاصية ٣

إذا كان  $\frac{أ}{ب} = \frac{ج}{د}$  فإن  $\frac{أ}{ج} = \frac{ب}{د}$   $\frac{\text{مقدم}}{\text{تالي}} = \frac{\text{مقدم}}{\text{تالي}}$

■ مثال ١: إذا كانت أ ، ٢ ، ب ، ٩ كميات متناسبة فإن  $\frac{أ}{٩} = \frac{ب}{٢}$  ومنها  $\frac{أ}{ب} = \frac{٩}{٢}$

■ مثال ٢: إذا كان: أ ، ٥ ، ٢ ، ٣ ، ٧ كميات متناسبة فإن  $\frac{أ}{٧} = \frac{٥}{٣}$  = .....

الحل:  $\frac{أ}{٧} = \frac{٥}{٣} \leftarrow \frac{٢ س}{٧ س} = \frac{٥}{٣} \therefore \frac{٢}{٧} = \frac{٥}{٣} \therefore \frac{٢}{٣٥} = \frac{٣ \times ٢}{٥ \times ٧} = \frac{٦}{٣٥}$

🌟 تدريب: إذا كان: أ ، ٢ ، ٣ ، ٧ كميات متناسبة فإن  $أ : ب = \dots\dots\dots$



## خاصية ٤

إذا كان  $\frac{أ}{ب} = \frac{ج}{د}$  فإن  $أ = ج م$  ،  $ب = د م$

♦ أي أن : إذا كانت أ ، ب ، ج ، د كميات متناسبة فإن :  $\frac{أ}{ب} = \frac{ج}{د} = م$  ومنها  $أ = ج م$  ،  $ب = د م$  يمكن أيضا استنتاج أن :  $أ = ب م$  ،  $ج = د م$  ولو استخدمت أي استنتاج منهم صح

♦ إذا كان  $\frac{أ}{ب} = \frac{٣}{٥}$  فإن :  $أ = ٣ م$  ،  $ب = ٥ م$  ومن الخطأ أن تقول  $أ = ٣$  ،  $ب = ٥$  وتنسى الثابت

♦ إذا كان  $\frac{س}{٣} = \frac{ص}{٤} = \frac{ع}{٥}$  فإن :  $س = ٣ م$  ،  $ص = ٤ م$  ،  $ع = ٥ م$

١ تكوين تناسب

١

٢ إيجاد قيم

٢

٣ التعويض بالقيم

٣

٤ إخراج العامل المشترك

٤

٥ الاختصار

٥

خطوات  
حل مسائل  
التناسب

## ملاحظات

١ للتسهيل هتلقى خطوة العامل المشترك في حالتين:

- إذا كانت الحدود مضروبة : مثل  $ج م \times ج$  فقط اضرب فتكون  $ج^٢ م$
- إذا كانت الحدود متشابهة : مثل  $١٠ م + ١٢ م$  فقط اجمع فتكون  $٢٢ م$

٢ عند التعويض: إذا كان  $أ = ب م$  فإن  $أ^٢ = ب^٢ م$  (ربع ب ، م)

٣ لإثبات أن أ ، ب ، ج ، د كميات متناسبة نثبت أن  $\frac{أ}{ب} = \frac{ج}{د}$  (استخدم المقص في البداية)

٤ لو هتختصر حاجة في البسط مع حاجة في المقام لازم الاتنين يكونوا مضروبين وغير مرتبطين بجمع أو طرح



## جبر الصف الثالث الإعدادي

مثال ١

إذا كانت أ ، ب ، ج ، د كميات متناسبة

$$\text{فأثبت أن: } \frac{أ٣ - ب٢ - ج}{أ٥ + ب٣ + ج} = \frac{أ٣ - ب٢ - ج}{أ٥ + ب٣ + ج}$$

الحل

$$\frac{أ}{ب} = \frac{ج}{د} = م \quad أ = ج م ، ب = د م$$

$$\frac{أ٣ - ب٢ - ج}{أ٥ + ب٣ + ج} = \frac{أ٣ - ب٢ - ج}{أ٥ + ب٣ + ج} = \text{الأيمن}$$

$$\frac{ج٣ - د٢ - ج}{ج٥ + د٣ + ج} = \frac{ج٣ - د٢ - ج}{ج٥ + د٣ + ج} =$$

$$\frac{ج٣ - د٢ - ج}{ج٥ + د٣ + ج} = \frac{ج٣ - د٢ - ج}{ج٥ + د٣ + ج} = \text{الأيسر}$$

$$\frac{ج٣ - د٢ - ج}{ج٥ + د٣ + ج} = \frac{ج٣ - د٢ - ج}{ج٥ + د٣ + ج} =$$

∴ الأيمن = الأيسر

مثال ٢

إذا كانت أ ، ب ، ج ، د في كميات متناسبة

$$\text{فأثبت أن: } \frac{أ - ج}{ب - د} = \frac{أ - ج}{ب - د}$$

الحل

$$\frac{أ}{ب} = \frac{ج}{د} = م$$

$$أ = ج م ، ب = د م$$

$$\frac{أ - ج}{ب - د} = \frac{أ - ج}{ب - د} = \frac{أ - ج}{ب - د} = \text{الأيمن}$$

$$\frac{أ - ج}{ب - د} = \frac{أ - ج}{ب - د} = \text{الأيسر}$$

$$\frac{أ - ج}{ب - د} = \frac{أ - ج}{ب - د} = \frac{أ - ج}{ب - د} =$$

∴ الأيمن = الأيسر

مثال ٣

إذا كانت  $\frac{ع}{٥} = \frac{ص}{٤} = \frac{س}{٣}$

$$\text{فأثبت أن: } \frac{١}{٢} = \frac{ع - ص٢}{ع + ص٢ - س٣}$$

الحل

$$\frac{ع}{٥} = \frac{ص}{٤} = \frac{س}{٣} = م$$

$$\frac{ع - ص٢}{ع + ص٢ - س٣} = \frac{ع - ص٢}{ع + ص٢ - س٣} = \text{الأيمن}$$

$$\frac{ع - ص٢}{ع + ص٢ - س٣} = \frac{ع - ص٢}{ع + ص٢ - س٣} =$$

$$\frac{ع - ص٢}{ع + ص٢ - س٣} = \frac{ع - ص٢}{ع + ص٢ - س٣} = \frac{ع - ص٢}{ع + ص٢ - س٣} = \text{الأيسر}$$

∴ الأيمن = الأيسر

مثال ٤

إذا كانت  $\frac{ع}{٥} = \frac{ص}{٤} = \frac{س}{٣}$  فأثبت أن:

$$\sqrt{٣س٣ + ٢ص٣ + ٢ع} = ٢س + ص$$

الحل

$$\frac{ع}{٥} = \frac{ص}{٤} = \frac{س}{٣} = م$$

$$\sqrt{٣س٣ + ٢ص٣ + ٢ع} = \sqrt{٣س٣ + ٢ص٣ + ٢ع} = \text{الأيمن}$$

$$\sqrt{٣س٣ + ٢ص٣ + ٢ع} = \sqrt{٣س٣ + ٢ص٣ + ٢ع} =$$

$$\sqrt{٣س٣ + ٢ص٣ + ٢ع} = \sqrt{٣س٣ + ٢ص٣ + ٢ع} =$$

$$\sqrt{٣س٣ + ٢ص٣ + ٢ع} = \sqrt{٣س٣ + ٢ص٣ + ٢ع} =$$

$$\sqrt{٣س٣ + ٢ص٣ + ٢ع} = \sqrt{٣س٣ + ٢ص٣ + ٢ع} = \text{الأيسر}$$

$$\sqrt{٣س٣ + ٢ص٣ + ٢ع} = \sqrt{٣س٣ + ٢ص٣ + ٢ع} =$$

∴ الأيمن = الأيسر



مثال ٥

إذا كانت أ ، ب ، ج ، د كميات متناسبة

$$\frac{ج}{ب} = \frac{أ}{ب - أ} = \frac{أ}{ب - د}$$

الحل

$$\frac{ج}{ب} = \frac{أ}{ب - أ} = \frac{أ}{ب - د}$$

$$ج = ب \cdot \frac{أ}{ب - أ} = ب \cdot \frac{أ}{ب - د}$$

$$\frac{ج}{ب} = \frac{أ}{ب - أ} = \frac{أ}{ب - د}$$

$$\frac{ج}{ب} = \frac{أ}{ب - أ} = \frac{أ}{ب - د}$$

مثال ٦

إذا كانت  $\frac{س}{ص} = \frac{٢}{٣}$  فأوجد قيمة:

$$\frac{س^٣ + ٢ص^٣}{٦ص - س}$$

الحل

$$س = ٢م ، ص = ٣م$$

$$\frac{س^٣ + ٢ص^٣}{٦ص - س} = \frac{٢^٣م^٣ + ٢ \cdot ٣^٣م^٣}{٦ \cdot ٣م - ٢م}$$

$$\frac{٨م^٣ + ٣٦م^٣}{١٨م - ٢م} =$$

$$\frac{٤٤م^٣}{١٦م} = \frac{١١}{٤}$$

تكملة محمود عوض  
معلم أول رياضيات

مثال ٧

$$\frac{أ}{ب} = \frac{٢ج - ٢أ}{٢ب - ٢ج}$$

فأثبت أن: أ ، ب ، ج ، د كميات متناسبة

الحل

حاصل ضرب الطرفين = حاصل ضرب الوسطين

$$\frac{أ}{ب} = \frac{٢ج - ٢أ}{٢ب - ٢ج}$$

$$\frac{أ}{ب} = \frac{٢ج - ٢أ}{٢ب - ٢ج}$$

$$\frac{أ}{ب} = \frac{٢ج - ٢أ}{٢ب - ٢ج}$$

$$\frac{أ}{ب} = \frac{٢ج - ٢أ}{٢ب - ٢ج}$$

$$\frac{أ}{ب} = \frac{٢ج - ٢أ}{٢ب - ٢ج}$$

$$\frac{أ}{ب} = \frac{٢ج - ٢أ}{٢ب - ٢ج}$$

مثال ٨

إذا كان أ : ب : ج = ٥ : ٧ : ٣

وكان أ + ب = ٢٧,٦

فأوجد قيمة كل من أ ، ب ، ج

$$أ = ٥م ، ب = ٧م ، ج = ٣م$$

بالتعويض في أ + ب = ٢٧,٦

$$٥م + ٧م = ٢٧,٦$$

$$١٢م = ٢٧,٦$$

$$٢,٣ = م$$

$$أ = ٥م = ٥ \times ٢,٣ = ١١,٥$$

$$ب = ٧م = ٧ \times ٢,٣ = ١٦,١$$

$$ج = ٣م = ٣ \times ٢,٣ = ٦,٩$$



## خاصية هـ

إذا كان  $\frac{أ}{ب} = \frac{ج}{د} = \frac{هـ}{و} = \dots$  فإن  $\frac{\text{مجموع المقدمات}}{\text{مجموع التوالى}} = \text{إحدى النسب}$

■ إذا كان  $\frac{أ}{ب} = \frac{ج}{د} = \frac{هـ}{و}$  فإنه يمكن ضرب أي نسبة في أي عدد ثم جمع المقدمات وجمع التوالى

فمثلاً: يمكن ضرب النسبة الأولى  $\times 2$  والنسبة الثانية  $\times 1$  وضرب النسبة الثالثة  $\times 3$  ثم بالجمع

$$\text{فيكون: } \frac{أ٢ - ج٣ + هـ٢}{ب٢ - د٣ + و٣} = \text{إحدى النسب}$$

■ عايز تعرف هتضرب ازاي وفي كام؟ بص على بسط ومقام المطلوب إثباه في المسألة وانت هتعرف  
■ ما تيجوا نشوف !

### مثال ١٠

$$\text{إذا كان } \frac{أ+ب}{٣} = \frac{ب+ج}{٦} = \frac{ج+أ}{٥}$$

$$\text{فاثبت أن: } ٧ = \frac{أ+ب+ج}{١}$$

### الحل

للوصول للبسط المطلوب: نجمع: النسبة الأولى + الثانية + الثالثة

$$\frac{أ+ب+ب+ج+ج+أ}{١٤} = \frac{أ+ب+ج+ج+أ+ب}{٥+٦+٣}$$

$$\frac{(أ+ب+ج)٢}{١٤} =$$

$$\text{①} \leftarrow \text{إحدى النسب} = \frac{أ+ب+ج}{٧} =$$

للحصول على المقام: نجمع النسبتين اللتي فيهم أ = النسبة الثانية

$$\frac{أ+ب+ج+أ-ب-أ}{٦-٥+٣}$$

$$\text{②} \leftarrow \text{إحدى النسب} = \frac{أ٢}{٢} =$$

من ١، ٢ ينتج أن

$$٧ = \frac{أ+ب+ج}{١} \therefore \frac{أ+ب+ج}{٧} =$$

### مثال ٩

$$\text{إذا كان } \frac{ع}{أ-ج٢} = \frac{ص}{ب٢-ج٢} = \frac{س}{ب٢+أ٢}$$

$$\text{فاثبت أن: } \frac{٢س+ص}{أ٤+ب٤-ج٤} = \frac{٢س٢+ص٢}{ب٦+أ٣}$$

### الحل

عايزين نوصل للبسط اللتي في الإثبات:

بضرب حدى النسبة الأولى  $\times 2$  والجمع مع الثانية

$$\text{إحدى النسب} = \frac{٢س+ص}{أ٤+ب٤-ج٤}$$

$$\text{①} \leftarrow \text{إحدى النسب} = \frac{٢س+ص}{أ٤+ب٤-ج٤}$$

للحصول على البسط الثانى نضرب النسبة الأولى  $\times 2$

والنسبة الثانية  $\times 2$  وجمع النسب الثلاثة

$$\frac{٢س٢+ص٢+ع}{أ٤+ب٤-ج٤+ج٢-ج٢+أ٢-ج٢}$$

$$\text{②} \leftarrow \text{إحدى النسب} = \frac{٢س٢+ص٢+ع}{ب٦+أ٣}$$

من ١، ٢ ينتج أن:

$$\frac{٢س٢+ص٢+ع}{ب٦+أ٣} = \frac{٢س+ص}{أ٤+ب٤-ج٤}$$

إذا كانت  $\frac{أ}{ب} = \frac{ج}{د} = \frac{هـ}{و} = \frac{١٢-ب+٥}{٣س}$  فأوجد قيمة س

## مسألة مهمة



♦ إذا كانت ب وسطا متناسبا بين أ ، ج فإن:

أ : الأول المتناسب ، ب : الوسط المتناسب ، ج : الثالث المتناسب

♦ الوسط المتناسب بين عددين  $\sqrt{\pm}$  الأول  $\times$  الثالث

مثال: الوسط المتناسب بين ٢ ، ١٨ ،  $\sqrt{\pm} = 18 \times 2 = 36 \sqrt{\pm} = 6 \pm$

♦ إذا كانت ب وسطا متناسبا بين أ ، ج فإن :  $\frac{أ}{ب} = \frac{ب}{ج} = م$

ومنها ب = ج م ، أ = ج م<sup>٢</sup>

♦ إذا كانت أ ، ب ، ج ، د في تناسب متسلسل فإن :  $\frac{أ}{ب} = \frac{ب}{ج} = \frac{ج}{د} = م$

ومنها ج = د م ، ب = د م<sup>٢</sup> ، أ = د م<sup>٣</sup>

### ملاحظات هامة

١ التناسب المتسلسل يختلف عن التناسب العادي في خطوتين: تكوين التناسب وإيجاد القيم

٢ في التناسب المتسلسل نحسب قيم المقدمات بدلالة آخر تالي

٣ عند التعويض: إذا كان أ = ب م ، فإن أ<sup>٢</sup> = ب<sup>٢</sup> م<sup>٢</sup> (حط التربيع على ب ، م)  
وإذا كان ب = د م ، فإن ب<sup>٢</sup> = د<sup>٢</sup> م<sup>٢</sup>  
وإذا كان أ = د م<sup>٣</sup> ، فإن أ<sup>٢</sup> = د<sup>٢</sup> م<sup>٦</sup>

مثال ٢ إذا كانت أ ، ب ، ج ، د في تناسب متسلسل

$$\text{فأثبت أن: } \frac{ج - أ}{أ} = \frac{د - ب}{ب}$$

الحل

$$\frac{أ}{ب} = \frac{ب}{ج} = \frac{ج}{د} = م$$

$$\therefore ج = د م ، ب = د م^٢ ، أ = د م^٣$$

$$\frac{ج - أ}{أ} = \frac{د م - د م^٣}{د م^٣} = \frac{د - د م^٢}{د م^٢} = \frac{ج - ب}{ب} = \text{الأيمن}$$

$$\frac{د}{م} = \frac{د(١ - م^٢)}{د م (١ - م^٢)} =$$

$$\frac{د}{م} = \frac{د \times د م}{د م^٢} = \frac{ب د}{أ} = \text{الأيسر}$$

$$\therefore \text{الأيمن} = \text{الأيسر}$$

مثال ١ إذا كانت ب وسطا متناسبا بين أ ، ج

$$\text{فأثبت أن: } \frac{أ}{ج} = \frac{أ^٢ + ب^٢}{ب^٢ + ج^٢}$$

الحل

$$\frac{أ}{ب} = \frac{ب}{ج} = م$$

$$\therefore ب = ج م ، أ = ج م^٢$$

$$\frac{أ}{ج} = \frac{أ^٢ + ب^٢}{ب^٢ + ج^٢} = \frac{ج م^٢ + ج م^٤}{ج^٢ + ج^٢ م^٢} = \text{الأيمن}$$

$$م = \frac{ج م^٢ (١ + م^٢)}{ج^٢ (١ + م^٢)} =$$

$$\frac{أ}{ج} = \frac{ج م^٢}{ج} = م = \text{الأيسر}$$

$$\therefore \text{الأيمن} = \text{الأيسر}$$

نصائح  
على أقل رياضيات  
محمود عوض



مثال ٣ إذا كانت أ ، ب ، ج ، د في تناسب متسلسل

$$\text{فأثبت أن: } \frac{أ}{ب} = \frac{أ^٢ - ج^٢}{ج^٢ - د^٢}$$

الحل

$$\frac{أ}{ب} = \frac{ب}{ج} = \frac{ج}{د} = م$$

$$ج = د م ، ب = د م^٢ ، أ = د م^٣$$

$$\text{الأيمن} = \frac{أ^٢ - ج^٢}{ج^٢ - د^٢} = \frac{د^٢ م^٦ - د^٢ م^٤}{د^٢ م^٤ - د^٢ م^٢}$$

$$= \frac{د^٢ م^٤ (م^٢ - ١)}{د^٢ م^٢ (م^٢ - ١)} =$$

$$\text{الأيسر} = \frac{ب}{د} = \frac{د م^٢}{د} = م$$

∴ الأيمن = الأيسر

مثال ٤ إذا كانت أ ، ب ، ج ، د في تناسب متسلسل

$$\text{فأثبت أن: } \frac{أ + ج}{ب} = \frac{أب - جد}{ب^٢ - ج^٢}$$

الحل

$$\frac{أ}{ب} = \frac{ب}{ج} = \frac{ج}{د} = م$$

$$ج = د م ، ب = د م^٢ ، أ = د م^٣$$

$$\text{الأيمن} = \frac{أب - جد}{ب^٢ - ج^٢} = \frac{د م^٣ \times د م^٢ - د م^٢ \times د م}{د^٢ م^٤ - د^٢ م^٢}$$

$$= \frac{د^٢ م^٥ - د^٢ م^٣}{د^٢ م^٢ (م^٢ - ١)} =$$

$$= \frac{د^٢ م^٣ (م^٢ - ١)}{د^٢ م^٢ (م^٢ - ١)} =$$

$$\text{الأيسر} = \frac{أ + ج}{ب} = \frac{د م^٣ + د م}{د م^٢} = \frac{د م (م^٢ + ١)}{د م^٢}$$

$$= \frac{م^٢ + ١}{م} \quad \therefore \text{الأيمن} = \text{الأيسر}$$

مثال ٥ إذا كانت ب وسطا متناسبا بين أ ، ج

$$\text{فأثبت أن: } \frac{أ - ب}{ب} = \frac{أ - ج}{ب + ج}$$

الحل

$$\frac{أ}{ب} = \frac{ب}{ج} = م$$

$$ج = د م ، ب = د م^٢ ، أ = د م^٣$$

$$\text{الأيمن} = \frac{أ - ب}{ب} = \frac{د م^٣ - د م^٢}{د م^٢} = \frac{د م^٢ (م - ١)}{د م^٢}$$

$$= \frac{م - ١}{١} =$$

$$\text{الأيسر} = \frac{أ - ج}{ب + ج} = \frac{د م^٣ - د م}{د م^٢ + د م} = \frac{د م (م^٢ - ١)}{د م (م + ١)}$$

$$= \frac{م - ١}{م + ١}$$

∴ الأيمن = الأيسر

مثال ٦ إذا كانت ص وسطا متناسبا بين س ، ع

$$\text{فأثبت أن: } \frac{س}{ص + س} = \frac{س ع}{ص^٢ + ص ع}$$

الحل

$$\frac{س}{ص} = \frac{ص}{ع} = م$$

$$ص = ع م ، س = ع م^٢$$

$$\text{الأيمن} = \frac{س ع}{ص^٢ + ص ع} = \frac{ع م^٢ \times ع}{ع^٢ م^٤ + ع^٢ م^٣}$$

$$= \frac{ع^٢ م^٣}{ع^٢ م^٣ (م + ١)} = \frac{م}{م + ١}$$

$$\text{الأيسر} = \frac{س}{ص + س} = \frac{ع م^٢}{ع م^٢ + ع م} = \frac{س}{ص + س}$$

$$= \frac{م}{م + ١} \quad \therefore \text{الأيمن} = \text{الأيسر}$$



♣ إذا كانت ص تتغير طردياً مع س فإنها تكتب: ص  $\propto$  س ومنها يكون:

الإيجاد قيمة
$\frac{ص_1}{ص_2} = \frac{س_1}{س_2}$

لحساب الثابت
$م = \frac{ص}{س}$

الإيجاد العلاقة
ص = م س

♦ العلاقة الطردية يمثلها خط مستقيم يمر بنقطة الأصل (٠ ، ٠)

♣ إذا كانت ص  $\propto$  س فإن الثابت م  $= \frac{ص}{س}$  والعلاقة هي ص = م س

♦ لإثبات أن ص  $\propto$  س نثبت أن ص = (ثابت) س

**مثال ٢** إذا كانت ص تتغير طردياً بتغير س وكانت ص = ١٤ عندما س = ٤ أوجد :  
(١) العلاقة بين س ، ص  
(٢) قيمة س عندما ص = ٢٠

**الحل** ص  $\propto$  س  $\therefore$  ص = م س  
 $\frac{1}{3} = \frac{14}{42} = \frac{ص}{س} = م$   
العلاقة هي:  $ص = \frac{1}{3} س$   
 $\frac{1}{3} = \frac{20}{س}$   
 $\therefore س = 3 \times 20 = 60$

**مثال ١** إذا كانت ص  $\propto$  س وكانت ص = ٦ عندما س = ٣ فأوجد : (١) العلاقة بين س ، ص  
(٢) قيمة ص عندما س = ٥

**الحل** ص  $\propto$  س  $\therefore$  ص = م س  
 $٦ = \frac{6}{3} = \frac{ص}{س} = م$   
العلاقة هي: ص = ٢ س  
بالتعويض عن س = ٥  
 $\therefore ص = 2 \times 5 = 10$

**مثال ٤** إذا كان:  $\frac{ص_1}{ص_2} = \frac{س_1 - ٢١}{س_2 - ٧}$  فاثبت أن: ص  $\propto$  ع

**الحل** حاصل ضرب الطرفين = حاصل ضرب الوسطين  
 $٢١ س - ع = ٧ س - ع$   
 $٢١ س = ٧ س$   
 $٢١ = ٧$   
 $ص = \frac{٢١}{٧} ع$   
 $\therefore ص \propto ع$

**مثال ٣** تسير سيارة بسرعة ثابتة بحيث تتناسب المسافة المقطوعة طردياً مع الزمن، فإذا قطعت السيارة ١٥٠ كليومتراً في ٦ ساعات، فكم كيلومتراً تقطعها السيارة في ١٠ ساعات

**الحل** نرمز للمسافة بالرمز ف والزمن بالرمز ز  
ف = ١٥٠ ، ز = ٦  
ف = ؟ ، ز = ١٠  
ف  $\propto$  ز  $\therefore \frac{ف_1}{ف_2} = \frac{ز_1}{ز_2}$   
 $\frac{٦}{١٠} = \frac{١٥٠}{ف}$   
 $\therefore ف = \frac{١٠ \times ١٥٠}{٦} = ٢٥٠$  كيلومتر



## التغير العكسي

♣ إذا كانت ص تتغير عكسيا مع س فإنها تكتب: ص  $\propto \frac{1}{س}$  ومنها يكون:

**الإيجاد قيمة**

$$\frac{ص_1}{س_1} = \frac{ص_2}{س_2}$$

**لحساب الثابت**

$$م = ص \times س$$

**الإيجاد العلاقة**

$$ص = م$$

♦ يمكن كتابة العلاقة العكسية على الصورة ص = م أو ص =  $\frac{م}{س}$

♦ لإثبات أن ص  $\propto \frac{1}{س}$  نثبت أن ص س = ثابت

**مثال ١**

إذا كانت ص  $\propto \frac{1}{س}$  وكانت ص = ٣ عندما س = ٢  
أوجد : (١) العلاقة بين س ، ص  
(٢) قيمة ص عندما س = ١,٥

**الحل**

ص  $\propto \frac{1}{س} \therefore ص س = م$

$٦ = ٢ \times ٣ = ص \times س = م$

العلاقة هي : ص س = ٦

$$\frac{ص_1}{س_1} = \frac{ص_2}{س_2} \quad \frac{٢}{١,٥} = \frac{٣}{ص}$$

$$ص = ١,٥ \times ٦ = ٩ \therefore ص = ٩$$

**مثال ٢**

من بيانات الجدول التالي أجب:

٦	٤	٢	س
٢	٣	٦	ص

(١) بين نوع التغير بين ص ، س  
(٢) أوجد ثابت التناسب  
(٣) أوجد قيمة ص عندما س = ٣

**الحل**

١ نوع التغير عكسي (لأنه كلما زادت س نقصت ص)

٢ ثابت التناسب = ص  $\times$  س = ١٢ = ٢  $\times$  ٦

٣ بالتعويض عن س = ٣ في العلاقة ص س = ١٢  
ص  $\times$  ٣ = ١١  $\therefore$  ص = ٤

**مثال ٣**

إذا كان : س<sup>٢</sup> - ٤س + ٩ = ٠  
فأثبت أن: ص  $\propto \frac{1}{س}$

**الحل**

بتحليل المقدار المربع الكامل

(س<sup>٢</sup> - ٤س + ٩) = ٠ باخذ الجذر التربيعي للطرفين

س<sup>٢</sup> - ٤س + ٩ = ٠

س<sup>٢</sup> - ٤س + ٩ = ٠

$\therefore ص \propto \frac{1}{س}$

**مثال ٤**

إذا كان: ص = أ - ٩، ص  $\propto \frac{1}{س}$  وكان أ = ١٨ عندما س =  $\frac{٢}{٣}$   
فأوجد العلاقة بين س، ص ثم استنتج قيمة ص عندما س = ١

**الحل**

ص  $\propto \frac{1}{س} \therefore ص س = م$

بالتعويض عن ص = أ - ٩

(أ - ٩) س = م  $\therefore$  م = (٩ - ١٨)  $\times$  ( $\frac{٢}{٣}$ )

$\therefore م = ٩ \times \frac{٤}{٩} = ٤$

$\therefore$  العلاقة هي ص س = ٤

عندما س = ١ ص  $\times$  ١ = ٤  $\therefore$  ص = ٤



## أسئلة اختر على الوحدة الثانية

١ إذا كان  $3 = أ = ٤ ب$  فإن  $أ : ب =$  .....

- (أ)  $٤ : ٣$  (ب)  $٣ : ٤$  (ج)  $٧ : ٣$  (د)  $٧ : ٤$

٢ إذا كان  $٥ - أ = ٢ ب = ٠$  فإن  $\frac{أ}{ب} =$  .....

- (أ)  $\frac{٥}{٢}$  (ب)  $\frac{٢}{٥}$  (ج)  $١٠$  (د)  $٥$

٣ إذا كان  $\frac{١}{ب} = \frac{٣}{٥}$  فإن  $\frac{١٥}{٣ب} =$  .....

- (أ)  $\frac{٣}{٥}$  (ب)  $\frac{٥}{٣}$  (ج)  $\frac{٢٥}{٩}$  (د)  $١$

٤ الرابع المتناسب للأعداد ٣ ، ٦ ، ٨ هو .....

- (أ)  $٤$  (ب)  $٧$  (ج)  $١٦$  (د)  $٢٠$

٥ إذا كانت أ ، ٤ ، ب ، ٩ كميات متناسبة فإن  $\frac{أ}{ب} =$  .....

- (أ)  $\frac{٩}{٤}$  (ب)  $\frac{٤}{٩}$  (ج)  $\frac{٩-}{٤}$  (د)  $\frac{٤-}{٩}$

٦ إذا كان: أ ، ٢س ، ب ، ٣س كميات متناسبة فإن  $أ : ب =$  .....

- (أ)  $١ : ٢$  (ب)  $١ : ٣$  (ج)  $٣ : ٢$  (د)  $٢ : ٣$

٧ إذا كان  $\frac{أ}{٥} = \frac{ب}{٤} = \frac{أ+ب}{ك}$  فإن  $ك =$  .....

- (أ)  $٥$  (ب)  $٤$  (ج)  $٩$  (د)  $١$

٨ الوسط المتناسب بين ٣ ، ٢٧ يساوى .....

- (أ)  $٩$  (ب)  $٩-$  (ج)  $٩ \pm$  (د)  $١٥$

٩ الثالث المتناسب للعددين ٥ ، ٨٠ يساوى .....

- (أ)  $١٠٠$  (ب)  $٨٠$  (ج)  $٤٠$  (د)  $٢٠$

٩ إذا كان ٣س ص = ٨ فإن .....

- (أ)  $٣٠$  ص (ب)  $٣٠$  ص (ج)  $٣٠$  ص (د)  $٣٠$  ص

١٥ إذا كان ص  $٣٠$  س وكان ص = ٢ عندما س = ٨ فإن ص = ٣ عندما س = .....

- (أ)  $١٦$  (ب)  $١٢$  (ج)  $٢٤$  (د)  $٦$

١١ العلاقة التى تمثل تغيراً طردياً بين المتغيرين س ، ص هى .....

- (أ)  $٥ = ص$  (ب)  $٣ + ص = س$  (ج)  $\frac{٤}{ص} = \frac{س}{٣}$  (د)  $\frac{س}{٢} = \frac{ص}{٥}$

١٢ إذا كان س ص = ٧ فإن ص  $٣٠$  .....

- (أ)  $\frac{١}{س}$  (ب)  $٧ - س$  (ج)  $س$  (د)  $٧ + س$

١٣ إذا كانت ٧ ، س ،  $\frac{١}{ص}$  فى تناسب متسلسل ، فإن س<sup>٢</sup> ص = .....

- (أ)  $٢$  (ب)  $٤$  (ج)  $٧$  (د)  $٩$



# واجب على الوحدة الثانية

النسبة والتناسب	التناسب المتسلسل	
<p>١ أوجد العدد الذي إذا أضيف مربعه إلى حدى النسبة ١١ : ٧ فإنها تصبح ٤ : ٥</p>	<p>١ إذا كانت الكميات أ ، ب ، ج ، د في تناسب متسلسل فاثبت أن <math>\frac{أ + ٢د}{ب} = \frac{٢د + ج}{د}</math></p>	
<p>٢ عدان النسبة بينهما ٤ : ٥ وإذا طرح من كل منهما ٦ أصبحت النسبة بينهما ٢ : ٣ أوجد العددين</p>	<p>٢ إذا كانت أ ، ب ، ج ، د في تناسب متسلسل فاثبت أن <math>\frac{أ}{ب + د} = \frac{٢ج}{٣د + د}</math></p>	
<p>٣ أوجد الثالث المتناسب للكميات ٨ ، ٩ ، ٢٧</p>	<p>٣ إذا كانت ب وسطا متناسبا بين أ ، ج فاثبت أن <math>\frac{٢ج - ٢ب}{٢أ - ٢ب} = \frac{٢ج - ٢ب}{٢أ - ٢ب}</math></p>	
<p>٤ أوجد العدد الذي إذا أضيف للأعداد ٣ ، ٥ ، ٩ ، ١٣ أصبحت أعدادا متناسبة</p>	<p>٤ أوجد العدد الذي إذا أضيف للأعداد ١ ، ٥ ، ٩ ، ١٧ فإنها تكون تناسبا متسلسلا</p>	
<p>٥ إذا كانت ٣ = أ = ٢ ب فأوجد قيمة <math>\frac{أ - ٣}{ب + ٢}</math></p>	<th>التغير الطردى والعكسي</th>	التغير الطردى والعكسي
<p>٦ إذا كانت <math>\frac{س}{٣} = \frac{ص}{٤} = \frac{ع}{٥}</math> فأوجد قيمة المقدار: <math>\frac{٢ص - ع}{٣س - ٢ص + ع}</math></p>	<p>١ إذا كانت ص ٣٠ س وكانت ص = ٢٠ عندما س = ٧ فأوجد العلاقة بين ص ، س ثم أوجد قيمة ص عندما س = ١٤</p>	
<p>٧ إذا كانت أ ، ب ، ج ، د كميات متناسبة فاثبت أن: <math>\frac{أ - ٣}{ب - ٢} = \frac{٣ - ٦}{٢ - ٢}</math></p>	<p>٢ إذا كانت أ ٣٠ ب وكانت أ = ١٠ عندما ب = ٥ فأوجد: (١) العلاقة بين أ ، ب (٢) قيمة ب عندما أ = ٤</p>	
<p>٨ إذا كانت أ ، ب ، ج ، د كميات متناسبة فاثبت أن: <math>\frac{أ - ٢}{ب - ٢} = \frac{٢ - ٢}{٢ - ٢}</math></p>	<p>٣ إذا كانت ص ٣٠ <math>\frac{١}{س}</math> وكانت ص = ٢ عندما س = ٤ فأوجد: (١) العلاقة بين ص ، س (٢) قيمة س عندما ص = ١٦</p>	
<p>٩ إذا كان <math>\frac{أ}{٤س + ص} = \frac{ب}{٤ص - س}</math> فاثبت أن: <math>\frac{أ + ب}{٥س - ٣ص} = \frac{أ - ب}{٣س + ٥ص}</math></p>	<p>٤ إذا كانت ص تتغير عكسيا مع س وكانت ص = ٢١ عندما س = ٤ فأوجد قيمة ص عندما س = ٧</p>	
<p>١٠ إذا كان <math>\frac{أ}{٢ب} = \frac{٢ج - ٢د}{٢د - ٢ب}</math> فاثبت أن أ ، ب ، ج ، د كميات متناسبة</p>	<p>٥ إذا كانت <math>\frac{أ + ٢}{٦} = \frac{ب + ٣}{٣}</math> فاثبت أن أ ٣٠ ج</p>	



## اختبار على الوحدة الثانية

إعداد أ / محمود عوض

**السؤال الأول:** اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة:

١ إذا كان ١ ، س ، ٤ في تناسب متسلسل فإن س = .....  
 (أ) ١ ± (ب) ٢ ± (ج) ٤ ± (د) ٣ ±

٢ إذا كان  $\frac{1}{4} = \frac{b}{3}$  فإن  $\frac{a-b}{a+b} = \dots\dots\dots$   
 (أ)  $\frac{3}{5}$  (ب)  $\frac{2}{5}$  (ج)  $\frac{1}{3}$  (د)  $\frac{1}{5}$

٣ إذا كانت ص تتغير عكسيا مع س وكانت  $\sqrt{v} = s$  عندما  $v = \frac{1}{\sqrt{v}}$  فإن ثابت التناسب = .....  
 (أ) ٥ (ب) ٣٥ (ج)  $\frac{5}{\sqrt{v}}$  (د)  $\frac{1}{5}$

٤ إذا كانت أ ، ب ، ٢ ، ٣ كميات متناسبة فإن  $\frac{b}{a} = \dots\dots\dots$   
 (أ)  $\frac{3}{2}$  (ب)  $\frac{2}{3}$  (ج) ٣ (د) ٢

**السؤال الثاني:**

(أ) إذا كانت ص تتغير عكسيا بتغير س وكانت ص = ٢ عندما س = ٦  
 فأوجد العلاقة بين ص ، س ثم أوجد قيمة س عندما ص = ٣

(ب) إذا كانت ٥ = أ = ٣ = ب فأوجد قيمة  $\frac{9 + 17b}{2 + 4b}$

**السؤال الثالث:**

(أ) إذا كانت ب وسطا متناسبا بين أ ، ج فاثبت أن :  $\frac{a+b}{b} = \frac{b+c}{c}$

(ب) إذا كانت ص ٥٥ س وكانت ص = ٣ عندما س = ٤ فأوجد:  
 (١) العلاقة بين ص ، س (٢) قيمة ص عندما س = ٨

**السؤال الرابع:**

(أ) أوجد الرابع المتناسب للأعداد ٣ ، ٥ ، ١٨

(ب) إذا كانت أ ، ب ، ج ، د كميات متناسبة فاثبت أن  $\frac{a-b}{d-b} = \frac{a+c}{d+c}$

انتهت الأسئلة



## التشتت

- ◆ التشتت هو التباعد أو الاختلاف
- ◆ من مقاييس التشتت: المدى ، الانحراف المعياري

## المدى

١

- ◆ هو أبسط مقاييس التشتت وأسهلها. وهو الفرق بين أكبر القيم وأصغرها.

$$\text{المدى} = \text{أكبر قيمة} - \text{أصغر قيمة}$$

- ◆ مثال: المدى للقيم ٢٣ ، ٢٢ ، ١٥ ، ١٨ ، ١٧ ، هو  $٨ = ٢٣ - ١٥$

الانحراف المعياري  $\sigma$ 

٢

- ◆ هو الجذر التربيعي الموجب لمتوسط مربعات انحرافات القيم عن وسطها الحسابي
- ◆ الانحراف المعياري هو أكثر مقاييس التشتت انتشاراً وأدقها.
- ◆ إذا تساوت جميع المفردات فإن : الانحراف  $\sigma$  = صفر والمدى = صفر

نص  
معلم أول رياضيات  
محمود عوض

## حساب الانحراف المعياري للجدول التكراري

$$\text{الانحراف } \sigma = \sqrt{\frac{\text{مج (س - س) }^2 \text{ ك}}{\text{مج ك}}}$$

حيث:  $\bar{س}$  الوسط الحسابي ، ك التكرار

$$\text{لحساب الوسط } \bar{س} = \frac{\text{مج (س} \times \text{ك)}}{\text{مج ك}}$$

## ملاحظات للحل

- ❖ تكون جدول من ٦ أعمدة
- ❖ العمود الأول س نكتب فيه أرقام الصف الأول من المسألة
- ❖ العمود الثاني ك نكتب فيه أرقام الصف الثاني من المسألة
- ❖ نملاً أول ثلاثة أعمدة ثم نحسب الوسط  $\bar{س}$  ثم نكمل الجدول

## حساب الانحراف المعياري لمجموعة من القيم

$$\text{الانحراف } \sigma = \sqrt{\frac{\text{مج (س - س) }^2 \text{ ن}}{\text{ن}}}$$

حيث:  $\bar{س}$  الوسط الحسابي ، ن عدد القيم

$$\text{لحساب الوسط } \bar{س} = \frac{\text{مجموع القيم}}{\text{عددهم}}$$

## ملاحظات للحل

- ◆ تكون جدول مكون من ٣ أعمدة
- ◆ العمود الأول س : نكتب فيه القيم التي في المسألة
- ◆ نحسب الوسط  $\bar{س}$  قبل أن نملاً الجدول



### مثال ١

احسب الانحراف المعياري للقيم:

١٦ ، ٣٢ ، ٥ ، ٢٠ ، ٢٧

الحل

$$\text{الوسط } \bar{س} = \frac{\text{مجموع القيم}}{\text{عددهم}}$$

$$20 = \frac{100}{5} = \frac{27+20+5+32+16}{5} =$$

س	س - $\bar{س}$	(س - $\bar{س}$ ) <sup>٢</sup>
١٦	٤ - ٢٠ = ١٦	١٦
٣٢	١٢ = ٢٠ - ٣٢	١٤٤
٥	١٥ = ٢٠ - ٥	٢٢٥
٢٠	٠ = ٢٠ - ٢٠	٠
٢٧	٧ = ٢٠ - ٢٧	٤٩
مج	xxx	٤٣٤

$$9,3 = \frac{434}{5} \sqrt{\frac{\text{مج (س -  $\bar{س}$ )<sup>٢</sup>}}{ن}} = \sigma$$

### مثال ٢

احسب الوسط الحسابي والانحراف المعياري

للتوزيع التكراري الآتي:

عدد الأطفال	صفر	١	٢	٣	٤	المجموع
عدد الأسر	٨	١٦	٥٠	٢٠	٦	١٠٠

الحل

س	ك	س × ك	س - $\bar{س}$	(س - $\bar{س}$ ) <sup>٢</sup>	(س - $\bar{س}$ ) <sup>٢</sup> × ك
٠	٨	صفر	٢ - ٢ = ٠	٤	٣٢ = ٨ × ٤
١	١٦	١٦	١ - ٢ = -١	١	١٦ = ١٦ × ١
٢	٥٠	١٠٠	٠ = ٢ - ٢	٠	٠ = ٥٠ × ٠
٣	٢٠	٦٠	١ = ٢ - ٣	١	٢٠ = ٢٠ × ١
٤	٦	٢٤	٢ = ٢ - ٤	٤	٢٤ = ٦ × ٤
مج	١٠٠	٢٠٠	xx	xx	٩٢

$$\text{الوسط } \bar{س} = \frac{\text{مج (س × ك)}}{\text{مج ك}} = \frac{200}{100} = 2$$

$$\text{الانحراف } \sigma = \sqrt{\frac{\text{مج (س -  $\bar{س}$ )<sup>٢</sup> × ك}}{\text{مج ك}}} = \sqrt{\frac{92}{100}} = 1 \text{ طفل}$$

### تدريب

احسب الانحراف المعياري للقيم:

٥ ، ٦ ، ٧ ، ٩ ، ٨

الحل


### تدريب

احسب الوسط الحسابي والانحراف المعياري

للتوزيع التكراري الآتي:

العمر بالسنوات	٥	٨	٩	١٠	١٢	المجموع
عدد الأطفال	١	٢	٣	٣	١	١٠

الحل

س	ك	س × ك	س - $\bar{س}$	(س - $\bar{س}$ ) <sup>٢</sup>	(س - $\bar{س}$ ) <sup>٢</sup> × ك
مج			xx	xx	



## حساب الانحراف المعياري للجدول التكراري ذي المجموعات

لحل بنفس قوانين وطريقة حل الانحراف المعياري للجدول التكراري البسيط مع اختلاف واحد فقط وهو:

◆ العمود الأول س نكتب فيه مركز المجموعة ويحسب كالتالي :

$$\text{مركز المجموعة} = \frac{\text{الحد الأدنى} + \text{الحد الأعلى}}{2}$$

**تدريب** احسب الوسط الحسابي والانحراف المعياري للتوزيع التكراري الآتي:

عدد الكيلومترات	٠٠	١٠	٢٠	٣٠	٤٠-٥٠	المجموع
عدد السيارات	٢	٥	١١	١٥	٧	٤٠

الحل


**مثال ٣** احسب الوسط الحسابي والانحراف المعياري للتوزيع التكراري الآتي:

المجموعة	٠٠	٠٤	٠٨	١٢	١٦-٢٠	المجموع
التكرار	٣	٤	٧	٢	٩	٢٥

الحل

نحسب مراكز المجموعات لنكتبها في عمود س

$$١٠ = \frac{٠ + ٤}{2} = ٢, ٢ = \frac{٤ + ٨}{2} = ٦, ٦ = \frac{٨ + ١٢}{2} = ١٠$$

$$١٤ = \frac{١٦ + ١٢}{2} = ١٤, ١٨ = \frac{٢٠ + ١٦}{2} = ١٨$$

س	ك	س × ك	س - س	(س - س)²	(س - س)² × ك
٢	٣	٦	٩,٦-	٩٢,١٦	٢٧٦,٤٨
٦	٤	٢٤	٥,٦-	٣١,٣٦	١٢٥,٤٤
١٠	٧	٧٠	١,٦-	٢,٥٦	١٧,٩٦
١٤	٢	٢٨	٢,٤	٥,٧٦	١١,٥٢
١٨	٩	١٦٢	٦,٤	٤٠,٩٦	٣٦٨,٦٤
مج	٢٥	٢٩٠	xx	xx	٨٠٠

$$\text{الوسط } \bar{س} = \frac{\text{مج (س × ك)}}{\text{مج ك}} = \frac{٢٩٠}{٢٥} = ١١,٦$$

$$\text{الانحراف } \sigma = \sqrt{\frac{\text{مج (س - س)² × ك}}{\text{مج ك}}}$$

$$٥,٧ = \sqrt{\frac{٨٠٠}{٢٥}} =$$



## أسئلة اختر على الإحصاء

- ١ الجذر التربيعي الموجب لمتوسط مربعات انحرافات القيم عن وسطها الحسابي يسمى .....  
( أ ) المدى ( ب ) الوسط الحسابي ( ج ) الانحراف المعياري ( د ) المنوال
- ٢ المدى لمجموعة القيم ٧ ، ٣ ، ٦ ، ٩ ، ٥ يساوي .....  
( أ ) ٣ ( ب ) ٤ ( ج ) ٦ ( د ) ١٢
- ٣ الفرق بين أكبر قيمة وأصغر قيمة لمجموعة من البيانات هو .....  
( أ ) المنوال ( ب ) الوسيط ( ج ) الوسط ( د ) المدى
- ٤ أسهل وأبسط مقاييس التشتت هو .....  
( أ ) المنوال ( ب ) الوسيط ( ج ) المدى ( د ) الانحراف المعياري
- ٥ إذا كانت ١٨ هي أكبر مفردات مجموعة ما وكان المدى = ٦ فإن أصغر مفردات المجموعة = .....  
( أ ) ٨ ( ب ) ١٢ ( ج ) ٢٤ ( د ) ٣٦

## واجب على الإحصاء

- ١ احسب الوسط الحسابي والانحراف المعياري للقيم ٨ ، ١٠ ، ١٢ ، ١٤ ، ١٦
- ٢ فيما يلي التوزيع التكراري لعدد الوحدات التالفة التي وجدت في ١٠٠ صندوق من الوحدات المصنعة

عدد الوحدات التالفة	صفر	١	٢	٣	٤	٥
عدد الصناديق	٣	١٦	١٧	٢٥	٢٠	١٩

أوجد الانحراف المعياري للوحدات التالفة

- ٣ التوزيع التكراري الآتي يبين درجات ٥٠ طالب في مادة الرياضيات

عدد الوحدات التالفة	-١٠	-٢٠	-٣٠	-٤٠	-٥٠	المجموع
عدد الصناديق	٢	٨	١٠	١٨	١٢	٥٠

أوجد الانحراف المعياري لهذا التوزيع



## تراكمي

اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة:

١  $\{1, 0\} - [3, 1] = \dots$   
(أ)  $[3, 1]$  (ب)  $[3, 1]$  (ج)  $[3, 1]$  (د)  $\{3\}$

٢ مجموعة حل المعادلة  $(س - 1)^2 = 9$  في ح هي .....  
(أ)  $\{4\}$  (ب)  $\{2\}$  (ج)  $\{2, 4\}$  (د)  $\{3\}$

٣ إذا كانت  $س^2 = 34$  فإن س .....  
(أ) 3 (ب) 4 (ج) 6 (د) 64

٤ إذا كانت  $\frac{3}{4} = \frac{3}{س} + \frac{3}{4}$  فإن س .....  
(أ) 2 (ب) 4 (ج) 3 (د)  $\frac{3}{2}$

٥ ٢٠٪ من ١٠ جنيهات = ..... جنيهه  
(أ) 2 (ب) 2,5 (ج) 5 (د) 20

٦ إذا كان س عددا سالبا فإن أكبر الأعداد التالية هو .....  
(أ)  $س + 3$  (ب)  $3س$  (ج)  $3 - س$  (د)  $\frac{3}{س}$

٧  $(2 + \sqrt{5})(2 - \sqrt{5}) = \dots$   
(أ) 5 (ب) 3 (ج) 2 (د) 1

٨ إذا كان  $أ^2 - ب^2 = 12$ ،  $أ + ب = 3$  فإن  $أ - ب = \dots$   
(أ) 8 (ب) 4 (ج) 10 (د) 36

٩  $\{5, 1\} \cup \dots = \{5, 1\}$   
(أ)  $[5, 1]$  (ب)  $[5, 1]$  (ج)  $[5, 1]$  (د)  $[5, 1]$

١٠  $ح \cap ح = \dots$   
(أ)  $ح \cap ح$  (ب)  $ن \cap ن$  (ج)  $ح \cup ح$  (د)  $ن \cup ن$

١١ المعكوس الضربي للعدد  $\frac{\sqrt{3}}{6}$  هو .....  
(أ)  $\frac{\sqrt{3}}{6}$  (ب)  $6\sqrt{3}$  (ج)  $2\sqrt{3}$  (د)  $2 - \sqrt{3}$